3.3 泰勒 (Taylor) 公式

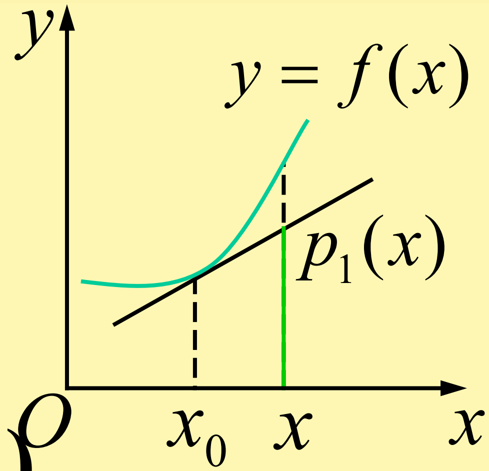
一　　问题的提出

二　　泰勒定理

三　　基本初等函数的泰勒公式

四　　泰勒定理的应用

一、问题的提出



前面讲微分时，我们有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

以直代曲

$$(\,f'(x_0)\neq 0,\ \ |x-x_0|<<1\,)$$

不足：1、精确度不高；2、误差不能估计.

希望 ：用较高次多项式 $P_n(x)$ 近似表示 $f(x)$, 使 $P_n(x)$ 在点 x_0 处与 $f(x)$ 有相同的函数值，一阶导数值，直至 n 阶导数值，并找出误差公式。

设 $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$

$+ \dots a_n(x - x_0)^n$

$$\left.\begin{aligned} &P_n(x_0) = a_0 = f(x_0) \\ &P_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0) \\ &P_n''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0) \\ &\quad\vdots \\ &P_n^{(n)}(x_0) = n!a_n = f^{(n)}(x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

（1）

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

（2） $k = 0, 1, 2, \cdots, n$

N J U P T

于是 $$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad （3）$$

（3）式就是我们要找的多项式，称为 n 阶泰勒多项式。

二、泰勒 (Taylor) 中值定理 ：

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间）②

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式 .

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项 .

2．关于泰勒公式的进一步认识

(1) 如果 $n=0$，则泰勒公式变为拉格朗日中值公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

ξ 位于 x 与 x_0 之间

所以泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广

（2） 误差估计

若以 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$（ n 阶泰勒多项式）

近似表达 $f(x)$ 时，误差为 $|R_n(x)|$. 如果对某个

固定的 n ， $|f^{(n+1)}(x)|$ 在 (a, b) 内有界

$(\leq M)$,

则 有$\left|R_n(x)\right| = \left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \dfrac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$

于是有 $$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

即 $$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

—— n 阶泰勒公式的佩亚诺余项

这样就有 $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \qquad ③$$

③ 式称为 $f(x)$ 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

3. 麦克劳林公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式变形为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad ④$$

其中 $\xi = \theta x$ ， $0 < \theta < 1$

或 $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \qquad ⑤$$

④ 式⑤式分别叫做 $f(x)$ 的带拉格朗日，佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式。

三、基本初等函数的麦克劳林公式

例 1 、求下列基本初等函数的麦克劳林公式

1、$f(x)=e^x$

解 $\because \quad f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$

$$\therefore \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ 代入公式，得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1).$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

2、$f(x)=\sin x$

解 :$f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})\quad k=0,1,2,\cdots,n+1$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\cdots$$

取 $k=2n$ ，则

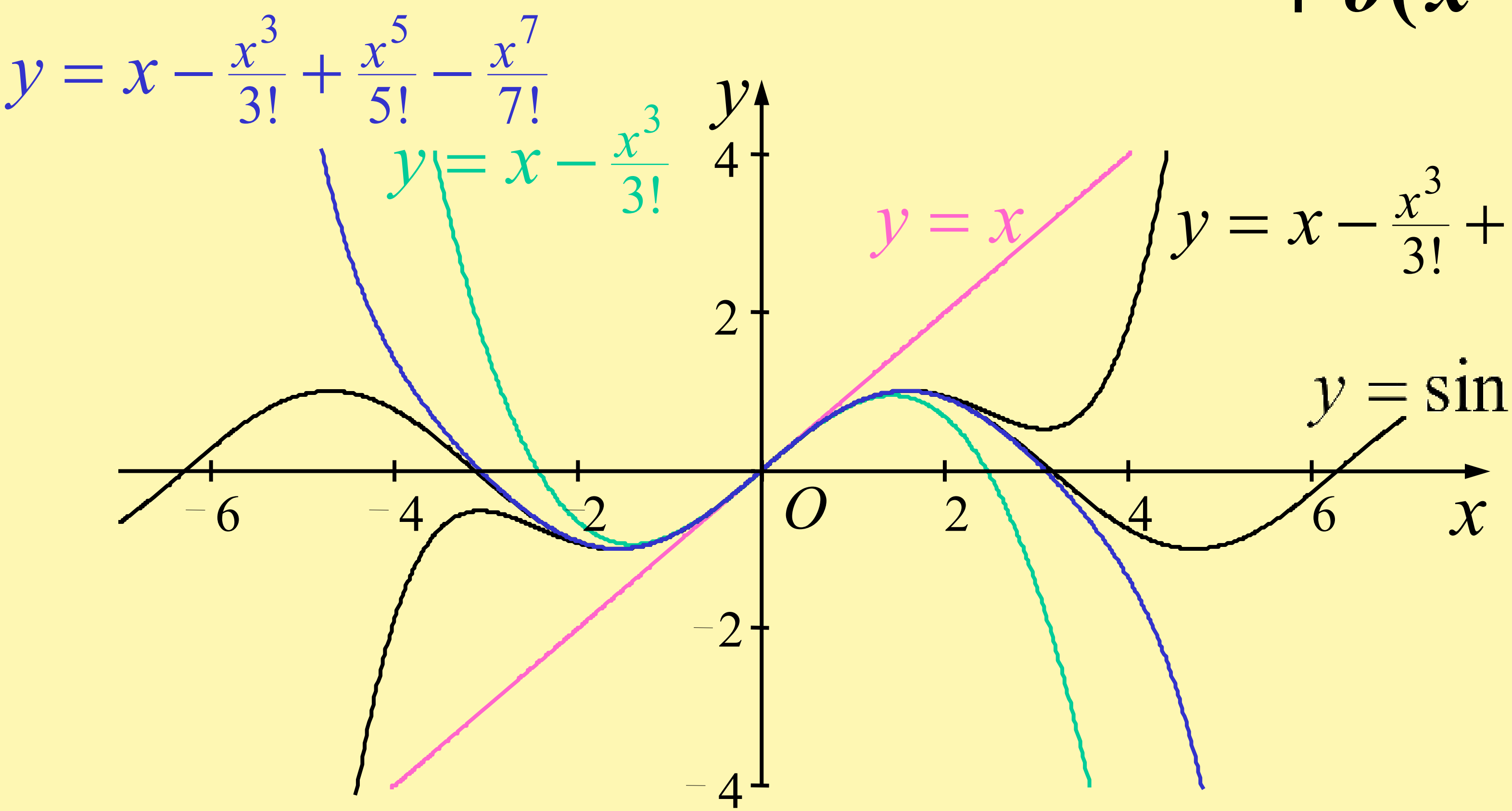
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n}(x)$$

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin(\theta x+(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!}x^{2n+1}\qquad 0<\theta<1$$

或$R_{2n}(x)=o(x^{2n})$

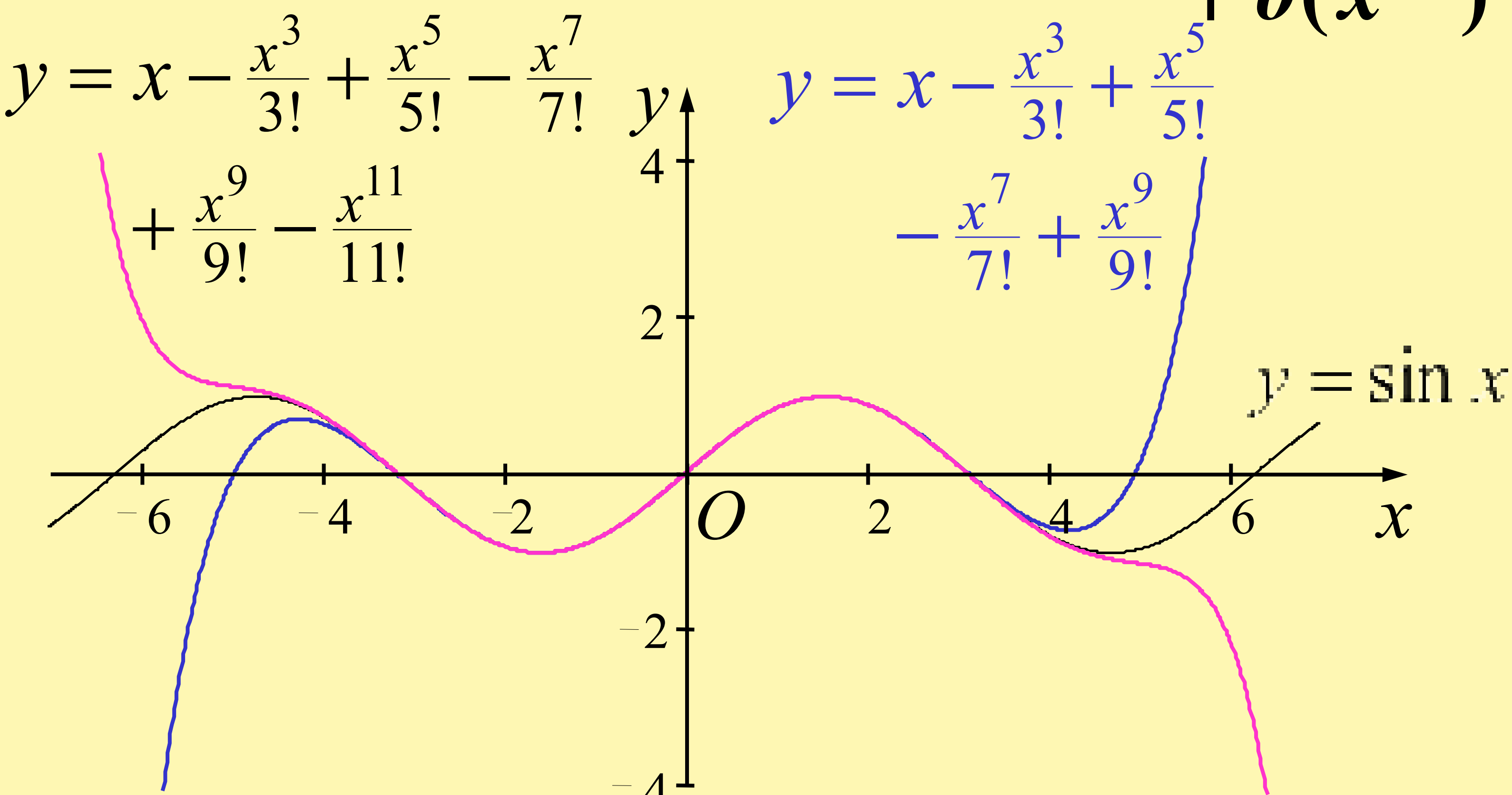
泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$



泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$



3、$f(x)=\cos x$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

其中

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\cos(\theta x + (n+1)\pi)}{(2n+2)\,!} x^{2n+2} \quad (0<\theta<1)$$

$$R_{2n+1}(x) = o(x^{2n+1})$$

4 $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$$(0<\theta<1)$$

$$R_n(x)=o(x^n)$$

5 $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$

$$R_n(x) = o(x^n)$$

基本初等函数的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + o(x^n)$$

四　泰勒定理的应用

1、求函数的泰勒展开式

例 1　求 $f(x)=\tan x$ 的三阶 (佩亚诺) 麦克劳林公式

解

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\sec^2 x,\quad f'(0)=1$$

$$f''(x)=2\sec x\cdot\sec x\tan x=2\sec^2 x\tan x$$

$$=2(\tan^3 x+\tan x),\qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=2(3\tan^2 x\sec^2 x+\sec^2 x)$$

$$f'''(0)=2$$

$f(x)=\tan x$ 的三阶 (佩亚诺余项) 麦克劳林公式

$$\tan x=x+\frac{2}{3!}x^3+o(x^3)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

例 2 求$f(x)=\ln x$按$x-4$的幂展开的带有佩亚诺余项的n阶泰勒公式

解 $f(x)=\ln x=\ln(4+x-4)$

$$=\ln 4+\ln\left(1+\frac{x-4}{4}\right)$$

$$=\ln 4+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-4}{4}\right)^{k}+o((x-4)^{n})$$

注： 此方法称为间接展开法。一般带佩亚诺余项的泰勒公式可用此法，带拉格朗日 余项的用直接法。

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k}+o(x^{n})$$

$$(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$f(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-4)^{n+1}$$

$$= \ln 4 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-4}{4}\right)^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^{n+1}}(x-4)^{n+1}$$

ξ在4与x之间，$\xi = 4 + \theta(x-4)$.

2．泰勒公式(带佩亚诺余项的麦克劳林公式)用于极限运算

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解 $\because \quad e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$\therefore \quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}.$$

3．泰勒公式用于无穷小的阶的估计

例 4 **设$x \to 0, \sin x - \tan x$是x的几阶无穷小.**

解 $\sin x - \tan x$

$$= [x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)] - [x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)]$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$\therefore$ 当$x \to 0, \sin x - \tan x$是x的3**阶无穷小.**

例 5 若$f(x)=\sin 3x + A\sin 2x + B\sin x$，当$x\to 0$时为$x$的5阶无穷小，求$A, B$.

解

$$f(x)=[3x-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}+o(x^6)]$$

$$+A[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^6)]$$

$$+B[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)]$$

$$f(x)=[(2A+B+3)x-(\frac{2^3}{3!}A+\frac{1}{3!}B+\frac{3^3}{3!})x^3$$

$$+(\frac{3^5}{5!}+\frac{2^5}{5!}A+\frac{1}{5!}B)x^5+o(x^6)]$$

$$\begin{cases} 2A + B + 3 = 0 \\ \dfrac{2^3}{3!}A + \dfrac{1}{3!}B + \dfrac{3^3}{3!} = 0 \end{cases}$$

$$A = -4, \quad B = 5.$$

内容小结

1. 泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n)$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

当 $x_0=0$ 时为**麦克劳林公式** .

2. 常用函数的麦克劳林公式

$$e^x, \quad \ln(1+x), \quad \sin x, \quad \cos x, \quad (1+x)^\alpha$$

3. 泰勒公式的应用

(1) 近似计算

(2) 利用多项式逼近函数 例如 $\sin x$

(3) 其他应用——求极限，判别无穷小的阶等.

习题 3-3