3.4　函数的单调性与极值

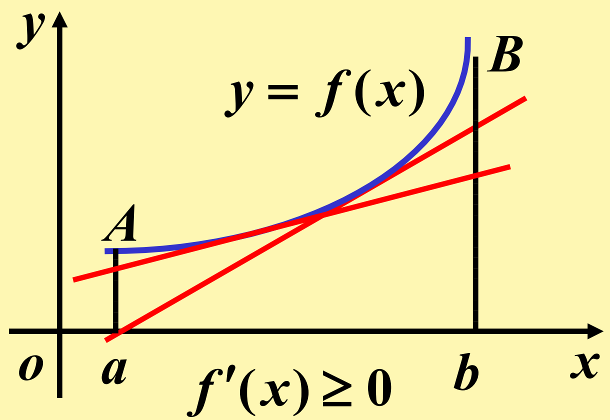
3.4.1 、　函数的单调性

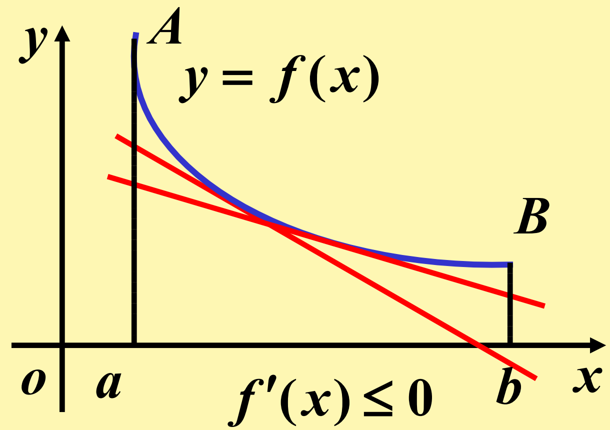
3.4.2 、　函数的极值

3.4.3 、　函数的最值

3.4.1、 函数的单调性

1、 单调性的判别法





定理 1 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那末函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那末函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

证明 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, 且 $x_1 < x_2$,应用拉氏定理，得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2)$$

$\because x_2 - x_1 > 0,$

若在(a,b)内，$f'(x) > 0$, 则 $f'(\xi) > 0$,

$\therefore f(x_2) > f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

若在(a,b)内，$f'(x) < 0$, 则 $f'(\xi) < 0$,

$\therefore f(x_2) < f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

注 定理中的闭区间可换成其他各种区间，结论仍成立.

例 1 讨论函数$y=e^{x}-x-1$的单调性.

解 $\because y'=e^{x}-1.$ 又 $\because D:(-\infty,+\infty).$

在$(-\infty,0)$内, $y'<0,$ $\therefore$ 函数单调减少;

在$(0,+\infty)$内, $y'>0,$ $\therefore$ 函数在$[0,+\infty)$**单调增加**.

注 (1) $y=f(x)$的单调性在未指定区间时，应在其有定义的区间上讨论。

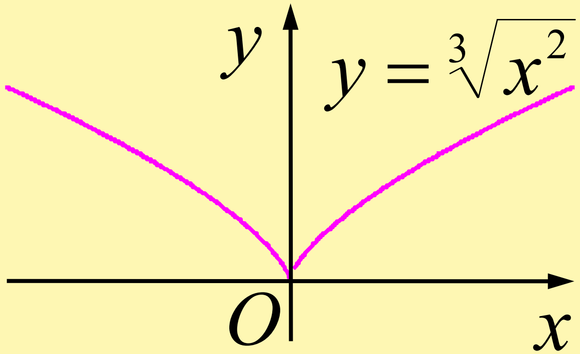
（2）界点的归属 ：两侧区间皆可（当 $f(x)$ 连续时）

说明：

1）单调区间的分界点除导数为零的点外，也可是导数不存在的点．

例如，$y=\sqrt[3]{x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

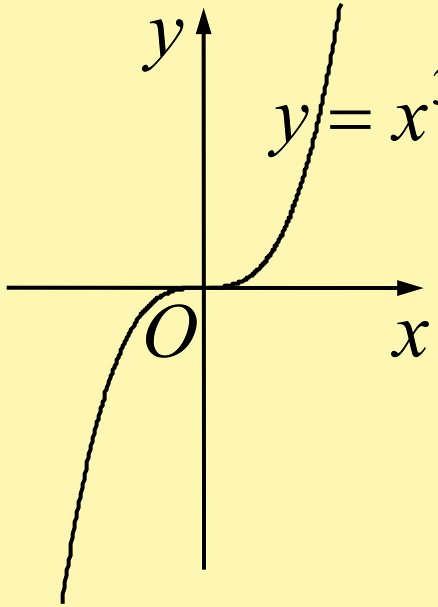
$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \qquad y'\big|_{x=0}=\infty$$



2）如果函数在某导数为零的点两边导数同号，则不改变函数的单调性．

例如，$y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=3x^2 \qquad y'\big|_{x=0}=0$$



2、 单调区间的求法

由以上讨论知：导数为零的点和不可导点，可能是单调区间的分界点.

方法：（1） f（x）的定义域、连续区间

(2) 求出$f'(x)$的零点及 $f'(x)$ 不存在的点。

(3) **用导数的零点及** $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ **的定义区间.**

(4) 判断区间内导数的符号.

(5) 依$f'(x)$的符号判别单调性。

例 2 求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的单调区间

解 $\because D:(-\infty,+\infty).$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0,$ 得 $x_1=-1, x_2=3.$

列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

单调增区间为 $(-\infty,-1]$ $[3,+\infty)$

单调减区间为 $[-1,3]$

例 3. 求函数$f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$的单调区间 .

解： $$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{2}{5}$

$x_2=0$导数不存在

列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-0.33	$\nearrow$

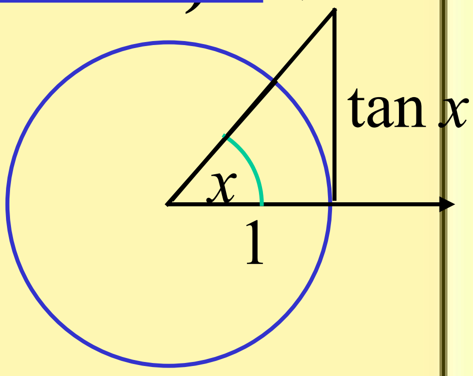
$f(x)$在$(-\infty,0]$, $[\frac{2}{5},+\infty)$单调增　在$[0,\frac{2}{5}]$单调减

例 4. 证明 $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$ 时，成立不等式 $\dfrac{\sin x}{x} \ge \dfrac{2}{\pi}$.

证： 令 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上可导，且

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\underline{(x - \tan x) < 0}$$



又 $f(x)$ 在 $\dfrac{\pi}{2}$ 处左连续，

因此 $f(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2}]$ 内单调递减，

因此 $f(x) \ge f(\dfrac{\pi}{2}) = 0$ 从而 $\dfrac{\sin x}{x} \ge \dfrac{2}{\pi}$， $x \in (0, \dfrac{\pi}{2}]$

注：利用单调性可以证明不等式

例 5. **证明：当$x>0, e^x>1+(1+x)\ln(1+x)$**

证明：设$f(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)$

$$f'(x)=e^x-\ln(1+x)-1$$

$$f''(x)=e^x-\frac{1}{1+x}>0 \quad (x>0)$$

$f'(x), f(x)$在$x\ge 0$连续,

$\Rightarrow f'(x)$,在$x\ge 0$单调增,

$\Rightarrow$当$x>0$, $f'(x)>f'(0)=0$,

$\Rightarrow f(x)$,在$x\ge 0$单调增,

$\Rightarrow$当$x>0$, $f(x)>f(0)=0$,

即 当$x>0, e^x>1+(1+x)\ln(1+x)$

例 6.讨论 方程$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k=0(k>0)$有几个实根.

解 $\because D:(0,+\infty)$. $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0,$

$f(x)$在$(0,e)$单调增，在$(e,+\infty)$单调减

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty, \qquad f(e)=k>0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{e}+\frac{k}{x}\right)=-\infty$$

$f(x)$在$(0,e),(e,+\infty)$上各有一零点。

注: 零点定理的推广

设$f(x)\in C(a,b)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to b^-} f(x<0$

则至少$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$

说明：利用单调性结合零点定理可以研究方程根（函数的零点）的个数及范围

方法　(1) 先求出 $f(x)$ 的单调区间。

(2) 判别每个单调区间的端点的函数值（或极限）的符号。

(3) 根据零点定理：若两端点的值一正一负，则在此区间内有唯一实根，其余则无实根。

3.4.2、 函数的极值及其求法

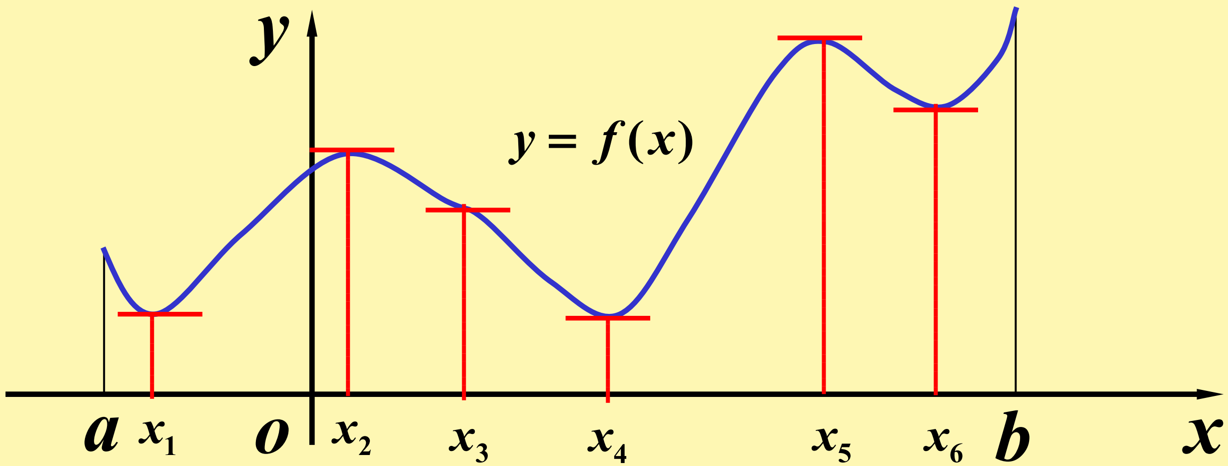
1 函数的极值的定义

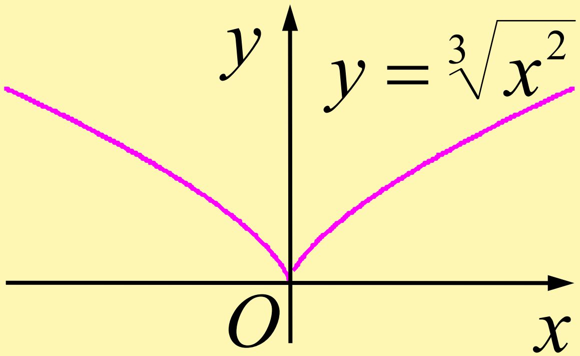
定义：**设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义**，$x_0 \in (a,b)$，**若存在 x_0 的一个邻域**，在其中当 $x \neq x_0$ **时**，

(1) $f(x) < f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点；称 $f(x_0)$ 为函数的极大值；

(2) $f(x) > f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点；称 $f(x_0)$ 为函数的极小值 .

极大值点与极小值点统称为极值点 .





注：极值是一局部概念，而最大最小是整体概念。

2 函数的极值的必要条件

定理 2（必要条件） 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且在 x_0 处取得极值，那末必定 $f'(x_0)=0$.

定义 **使导数为零的点**(即方程 $f'(x)=0$ **的实根**)叫做函数 $f(x)$ **的驻点.**

注：(1) 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，但函数的驻点却不一定是极值点.

例如，$y=x^3$，$y'\big|_{x=0}=0$，但 $x=0$ 不是极值点.

(2) 极值点也不一定是驻点 .

例 $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 处取得极值，

但 $x=0$ 处 导数不存在。

(3) 可能极值点：驻点，导数不存在点。

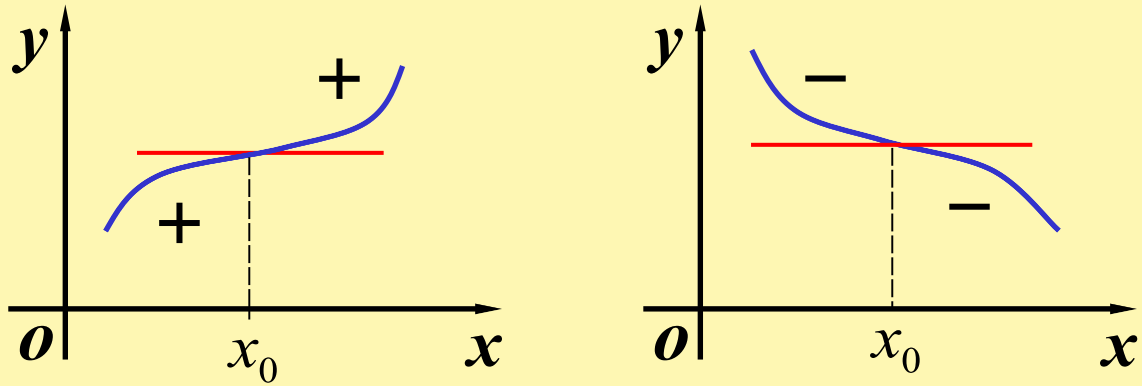
3 函数的极值的第一充分条件

定理 3（第一充分条件）设 $f(x)$ 在 x_0 (x_0 **处导数为零**或不存在)**处连续**，在 x_0 **的某去心邻域内可导。**

(1) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$，而在 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，) $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。

(2) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$，而在 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，) $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

(3) 若 $x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值。



(不是极值点情形)

4. 求极值的步骤

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求可能极值点，即驻点（方程 $f'(x)=0$ 的根）;

和导数不存在的点。

(3) 列表讨论 $f'(x)$ 在驻点左右的正负号，

判断极值点;

(4) 求极值.

例 1. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值 .

解： $$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=\frac{2}{5}$

$x_2=0$ 导数不存在

列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-0.33	$\nearrow$

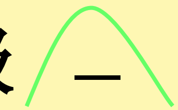
$\therefore x=0$ 是极大值点，其极大值为 $f(0)=0$

$x=\frac{2}{5}$ 是极小值点，其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-0.33$

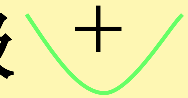
NJUPT

定理 4（第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值；



(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值.

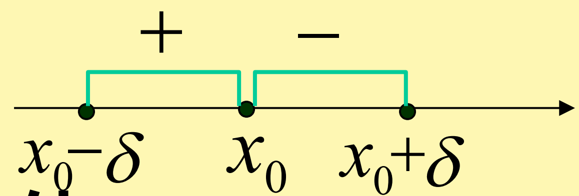


证：(1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)<0$，



由第一充分条件知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证

例 2. 求函数$f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解：1) 求导数 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$, $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

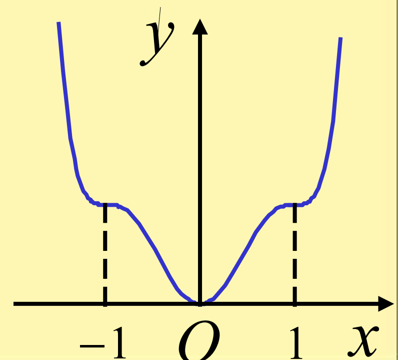
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$, 故 $f(0)=0$ 为极小值；

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用第一充分条件判别 .

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号,

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值 .



3.4.3 、函数的最大最小值

1　函数的最值的求法

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则其最值只能在极值点或端点处达到 .

求函数最值的方法：

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值可疑点

$$x_1, x_2, \cdots, x_m$$

(2) 最大值

$$M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

最小值

$$m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

特别：

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内（(a,b)）内只有一个极值可疑点时，若在此点取极大（小）值，则也是最大（小）值．
- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时，最值必在端点处达到．

2 应用举例

例 1 求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值．

解 $\because f'(x)=6(x+2)(x-1)$

解方程 $f'(x)=0$，得 $x_1=-2,\ x_2=1.$

计算 $f(-3)=23;\quad f(-2)=34;$

$f(1)=7;\quad f(4)=142;$

比较得 最大值 $f(4)=142,$ 最小值 $f(1)=7.$

例 2. 求$y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}\ (x \ge 0)$**的最大值及值域.**

解 $$y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

在$x \ge 0$时，$x = 1$为唯一驻点，且：

当$x < 1$,时，$f'(x) > 0, x > 1$时，$f'(x) < 0,$

所以，$f(x)$在$x = 1$处取得极大值。

因为$x = 1$是唯一驻点，所以$f(x)$在$x = 1$处取得最大值。

最大值为：$f(1) = \dfrac{1}{2}$

又$f(0) = 0,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$　　**值域为**$[0, \dfrac{1}{2}]$

3 实际问题求最值：

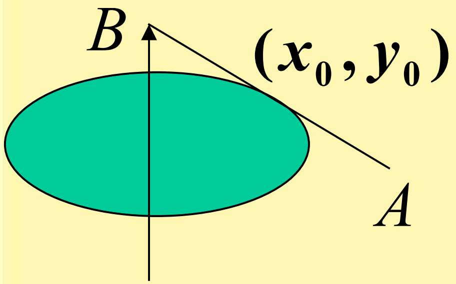
(1) 建立目标函数并确定定义域；

(2) 求最值；

若目标函数只有唯一驻点，则该点的函数值即为所求的最大（或最小）值.

例 3. 从椭圆$4x^2+y^2=4$的第一象限上哪一点作切线，才能使该切线与两坐标轴所围成的三角形的面积最小？

解　设点(x_0, y_0)，$(x_0>0, y_0>0)$



切线方程为：$y-y_0=\dfrac{-4x_0}{y_0}(x-x_0)$,

截距$OA=x_0+\dfrac{y_0^2}{4x_0}$，$OB=y_0+\dfrac{4x_0^2}{y_0}$

$$\therefore S=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{y_0^2}{4x_0}\right)\left(y_0+\frac{4x_0^2}{y_0}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(4x_0^2+y_0^2)(y_0^2+4x_0^2)}{4x_0y_0}=\frac{2}{x_0y_0}$$

问题化为：求$f(x)=x\sqrt{4-4x^2}$

在$0<x<1$内的最大值。

还可以求$y=x^2(4-4x^2)$在$0<x<1$内的最大值。

$y'=8x-16x^3$，令$y'=0$，得唯一驻点$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

由问题的实际意义知最小值一定存在，而在 (0 ，1) 内有唯一驻点**则**：$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y_0=1$**处面积最小。**

例 4. 若$a>1$，证明：对$\forall x\in[0,1]$，有：$x^a+(1-x)^a\geq\dfrac{1}{2^{a-1}}$.

证明 令$f(x)=x^a+(1-x)^a$，

$f'(x)=ax^{a-1}-a(1-x)^{a-1}$，得$x=\dfrac{1}{2}$为唯一驻点，

且：$f''(\dfrac{1}{2})=a(a-1)[\dfrac{1}{2^{a-2}}+\dfrac{1}{2^{a-2}}]>0$，

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$为极小值点，又因为它是唯一驻点，

所以为最小值点。

$\therefore f(x)\geq f(\dfrac{1}{2})$，即不等式成立。

注：利用最值可以证明不等式：

内容小结

本节主要介绍了函数单调性的判别方法以及函数极值与最值的求法。

本节要求掌握判断函数 $f(x)$ 的单调性的方法，会求函数在连续区间上的单调区间，并会用单调性证明不等式，以及判别根的存在性与个数。要求掌握求函数 $f(x)$ 的极值与最值的方法，掌握解决最值的应用题的方法，会用最值 证明不等式。

习题四 3.4