3.5 函数图形的描绘

3.5.1 曲线的凹凸性与拐点

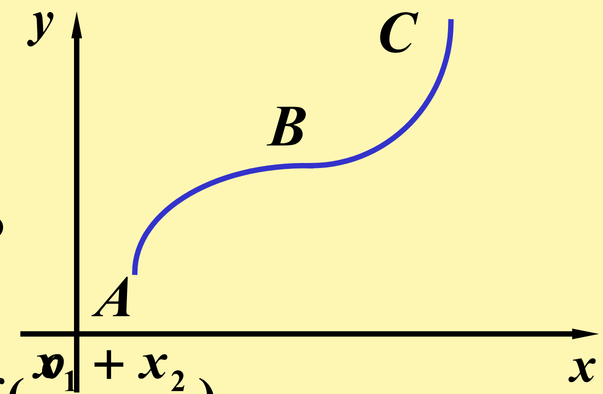
3.5.2 曲线的渐近线

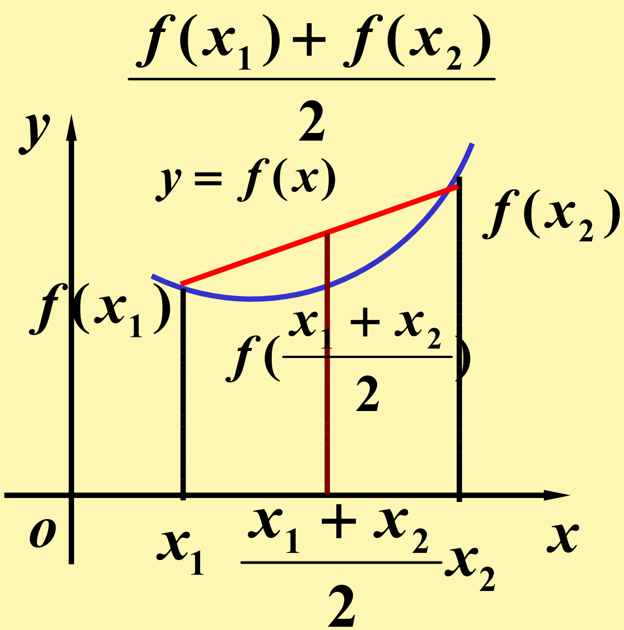
3.5.3 函数作图

3.5.1 曲线的凹凸与拐点

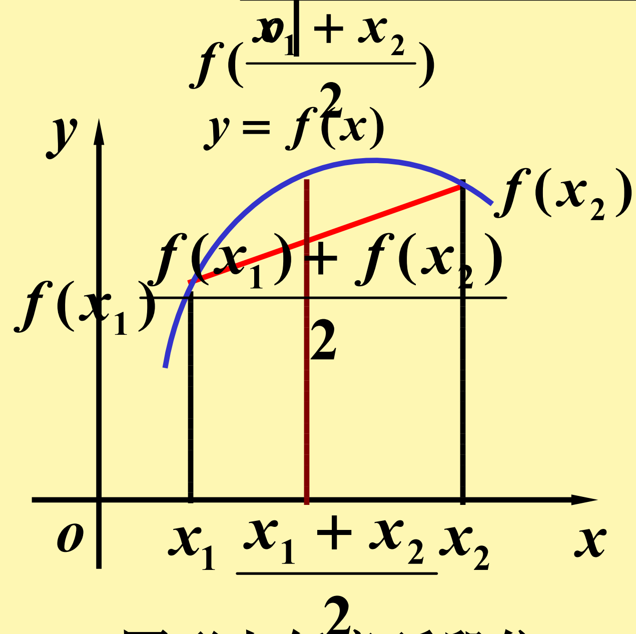
1． 曲线凹凸的概念

问题：如何研究曲线的弯曲方向？





图形上任意弧段位于所张弦的下方



图形上任意弧段位于所张弦的上方

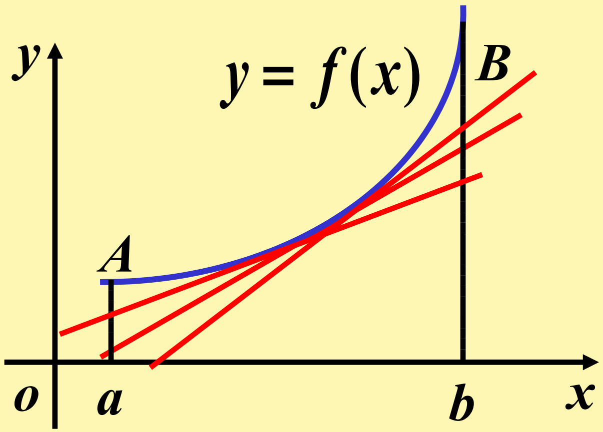
定义 设$f(x)$在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点x_1, x_2, 恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凹 的（或凹弧）;

如果恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凸 的（或凸弧）.

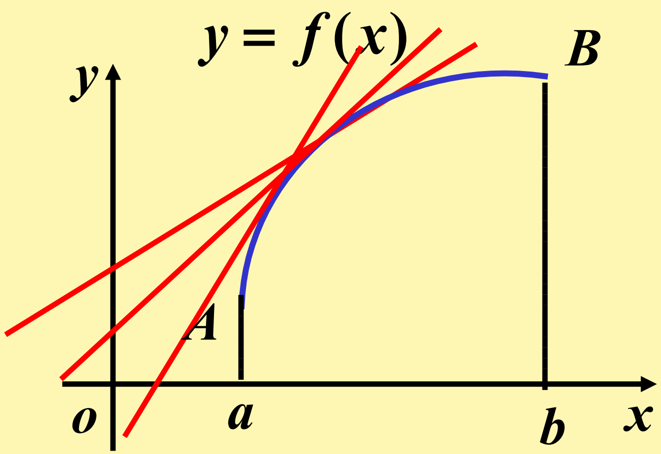
如果$f(x)$在$[a,b]$**内连续**, 且在 (a,b) **内的图形是凹**(或凸)**的**, 那末称 $f(x)$在$[a,b]$ **内的图形是凹**(或凸)的;

或称曲线$y=f(x)$在$[a,b]$ **内是凹**(或凸)**的**

2． 判定方法



$f'(x)$ 递增 $y''>0$



$f'(x)$ 递减 $y''<0$

定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数,若在 (a,b) 内

(1) $f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

(2) $f''(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的．

证明：设 x_1 、 x_2 是 $[a,b]$ 上任意两点， $x_1 < x_2$

， 记$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ 若$f''(x) > 0$

利用 $f(x)$ 的一阶泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1 - x_0)^2$$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

ξ_1在x_1与x_0之间

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(\frac{x_1-x_2}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{x_1-x_2}{2})^2$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{x_2-x_0}{2})^2$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(\frac{x_2-x_1}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{x_1-x_2}{2})^2$$

两式相加，有 ξ_2在x_2与x_0之间

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{x_1-x_2}{2})^2+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{x_1-x_2}{2})^2$$

$$\Rightarrow f(x_1)+f(x_2)-2f(x_0)>0$$

即 $$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

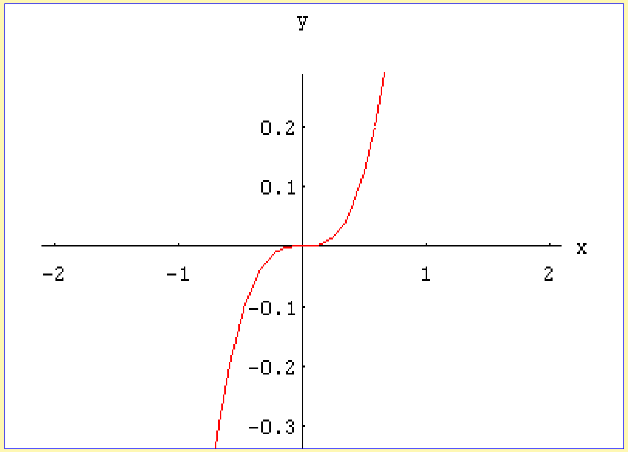
$\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

例 1 判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 $\because y' = 3x^2, \quad y'' = 6x,$

当$x < 0$时, $y'' < 0,$

$\therefore$ 曲线 在$(-\infty, 0]$为凸的;



当$x > 0$时, $y'' > 0,$

$\therefore$ 曲线 在$[0, +\infty)$为凹的;

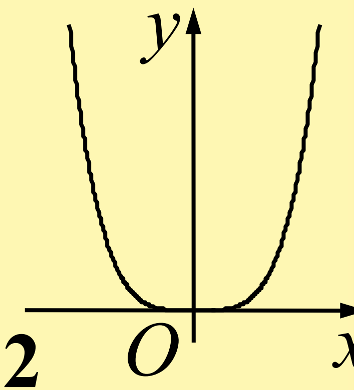
注意到 点$(0,0)$是曲线由凸变凹的分界点.

定义：连续曲线凹凸的分界点称为曲线 拐点。

从上例中知，在拐点处 $y''=0.$

注：(1) 并不是所有二阶导数为 0 的点都是拐点。

例 $y=x^4$，$y'=4x^3$，$y''=12x^2\geq 0$，



曲线 $y=x^4$ 是凹的。

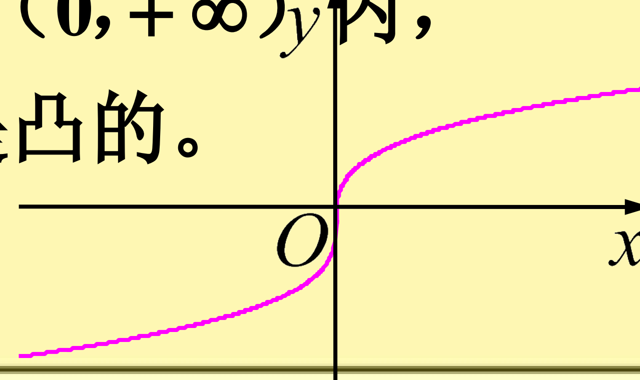
（2）拐点也不只是二阶导数为 0 的点。

例 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$y''=-\dfrac{2}{9x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

$x=0,\ y',\ y''$ 都不存在，但在 $(-\infty,0)$ 内 $y''>0$，

曲线在 $(-\infty,0]$ 内是凹的，在（$0,+\infty$）内，

$y''<0$，这曲线在 $[0,+\infty)$ 内是凸的。



$(0,0)$ 是拐点。

3　曲线的拐点凹凸性及其求法

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续，(或求出连续区间）

(1)　求 $f''(x)$

(2) 求在 (a,b) 二阶导数为 0 的点和二阶导数不存在的点

(3) 在（2）中解出的每一个点 x_0 把定义区间分成几部分

(4) 根据 $f''(x)$ 的符号判别凹凸性。根据 x_0 左右是否变号，如变号，则（$x_0, f(x_0)$）为拐点，如不变号，则不是拐点。

例2 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 $\because D:(-\infty,+\infty)$

$y'=12x^3-12x^2,\quad y''=36x(x-\frac{2}{3}).$

令 $y''=0$, 得 $x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3}.$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	拐点 $(0,1)$	凸的	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	凹的

凹凸区间为 $(-\infty,0]$, $[0,\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},+\infty)$.

例 3 判断曲线$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ (3-x)\sqrt{x} & x\ge 0 \end{cases}$的凹凸性及拐点

解

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ \dfrac{3(1-x)}{2\sqrt{x}} & x>0 \end{cases} \qquad f''(x)=\begin{cases} \dfrac{(2x+1)}{x^4}e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ \dfrac{-3(1+x)}{4x\sqrt{x}} & x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(3-x)\sqrt{x}=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$$

曲线在$(-\infty,+\infty)$连续，可能拐点处：$x=0,-\dfrac{1}{2}$

凹区间$[-\dfrac{1}{2},0]$，凸区间$(-\infty,-\dfrac{1}{2}],[0,+\infty)$，拐点$(0,0),(-\dfrac{1}{2},e^{-2})$

例4　**利用凹凸性证明不等式**

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2},\ (x>0, y>0, x\neq y).$$

证　令 $f(t) = t\ln t\ (t>0)$,

则 $f'(t) = \ln t + 1$,　　$f''(t) = \frac{1}{t} > 0$,

$\therefore f(t) = t\ln t$ 在 (x, y) 或 (y, x), $x>0, y>0$ 是凹的.

于是　$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)] > f(\frac{x+y}{2})$

即　$\frac{1}{2}[x\ln x + y\ln y] > \frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$,

即　$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.

3.5.2 曲线的渐近线

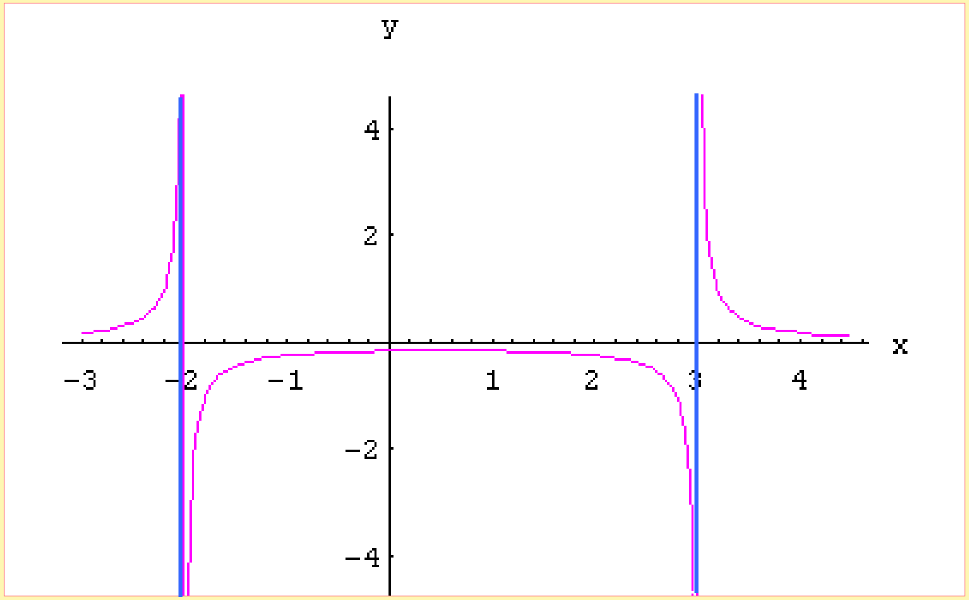
定义：当曲线 $y = f(x)$ 上的一动点 P 沿着曲线移向无穷点时，如果点 P 到某定直线 L 的距离趋向于零，那么直线 L 就称为曲线 $y = f(x)$ 的一条渐近线.

1. **铅直渐近线**(垂直于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$

那么 $x = x_0$ 就是 $y = f(x)$ 的一条铅直渐近线.

例如 $$y=\frac{1}{(x+2)(x-3)},$$



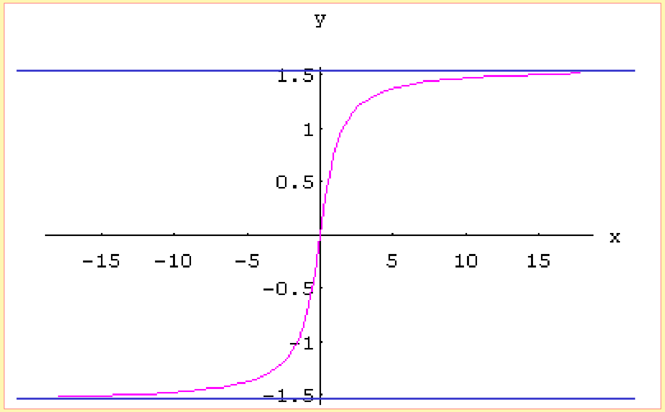
有铅直渐近线两条： $x=-2,\quad x=3.$

2. 水平渐近线 (平行于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ (b 为常数)

那么 $y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如 $y=\arctan x$,



有水平渐近线两条： $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y=-\dfrac{\pi}{2}$.

3. 斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ $(a,b$ 为常数)

那么 $y=ax+b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

斜渐近线求法:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b.$$

那么 $y=ax+b$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

注意： 如果

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ 不存在,

可以断定 $y=f(x)$ 不存在斜渐近线.

例 1 求 $f(x)=\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$ 的渐近线.

解 $D:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty,$$

$\therefore x = 1$ 是曲线的铅直渐近线.

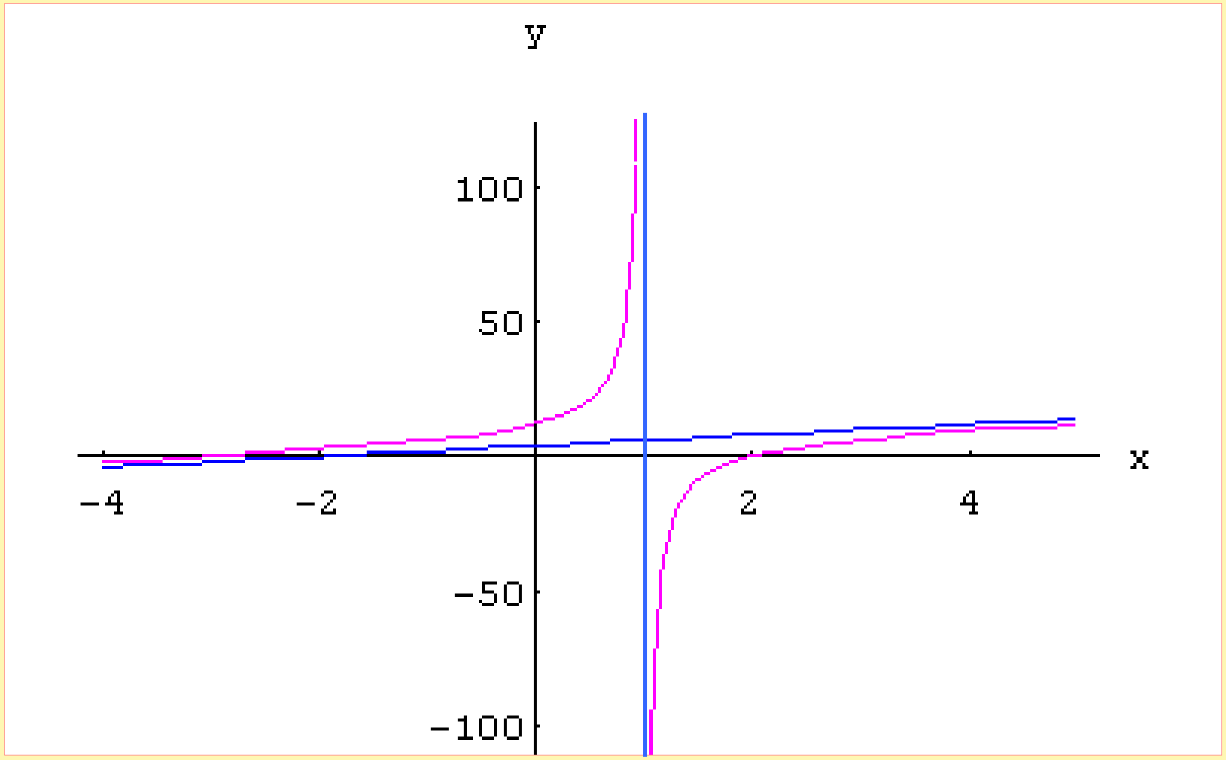
$$\text{又} \because \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2(x-2)(x+3)}{(x-1)} - 2x\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-2)(x+3) - 2x(x-1)}{x-1} = 4,$$

$\therefore y = 2x + 4$ 是曲线的一条斜渐近线.

$$f(x)=\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$$ 的两条渐近线如图



3.5.3 函数图形的描绘的步骤

利用函数特性描绘函数图形.

第一步 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域，对函数进行奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态的讨论，求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

第二步 求出方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在函数定义域内的全部实根，用这些根同函数的间断点或导数不存在的点把函数的定义域划分成几个部分区间.

第三步

确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减和凹凸，极值点和拐点；

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线、（斜渐近线）；

第五步 描出与方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，再综合前四步讨论的结果画出函数的图形．

作图举例

例 1 作函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解 $D:(-\infty,+\infty)$,

偶函数，图形关于 y 轴对称.

$$\varphi'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \varphi''(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

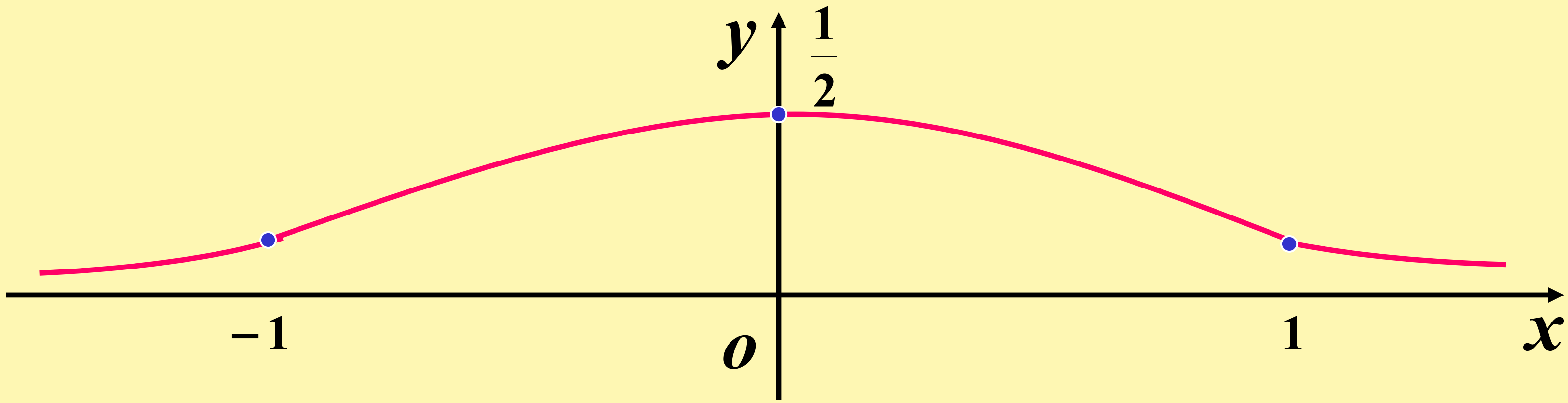
令 $\varphi'(x)=0$, 得驻点 $x=0$,

令 $\varphi''(x)=0$, 得特殊点 $x=-1,\ x=1$.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$, 得水平渐近线 $y=0$.

列表确定函数单调区间，凹凸区间及极值点与拐点：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$		拐点 $(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$		极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	



例 2 作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ **的图形.**

解 $D: x\neq 0,$ 非奇非偶函数，且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\qquad f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0,$ 得驻点 $x=-2,$

令 $f''(x)=0,$ 得特殊点 $x=-3.$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2,$$

得水平渐近线 $y=-2;$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2\right] = +\infty,$$

得铅直渐近线 $x = 0$.

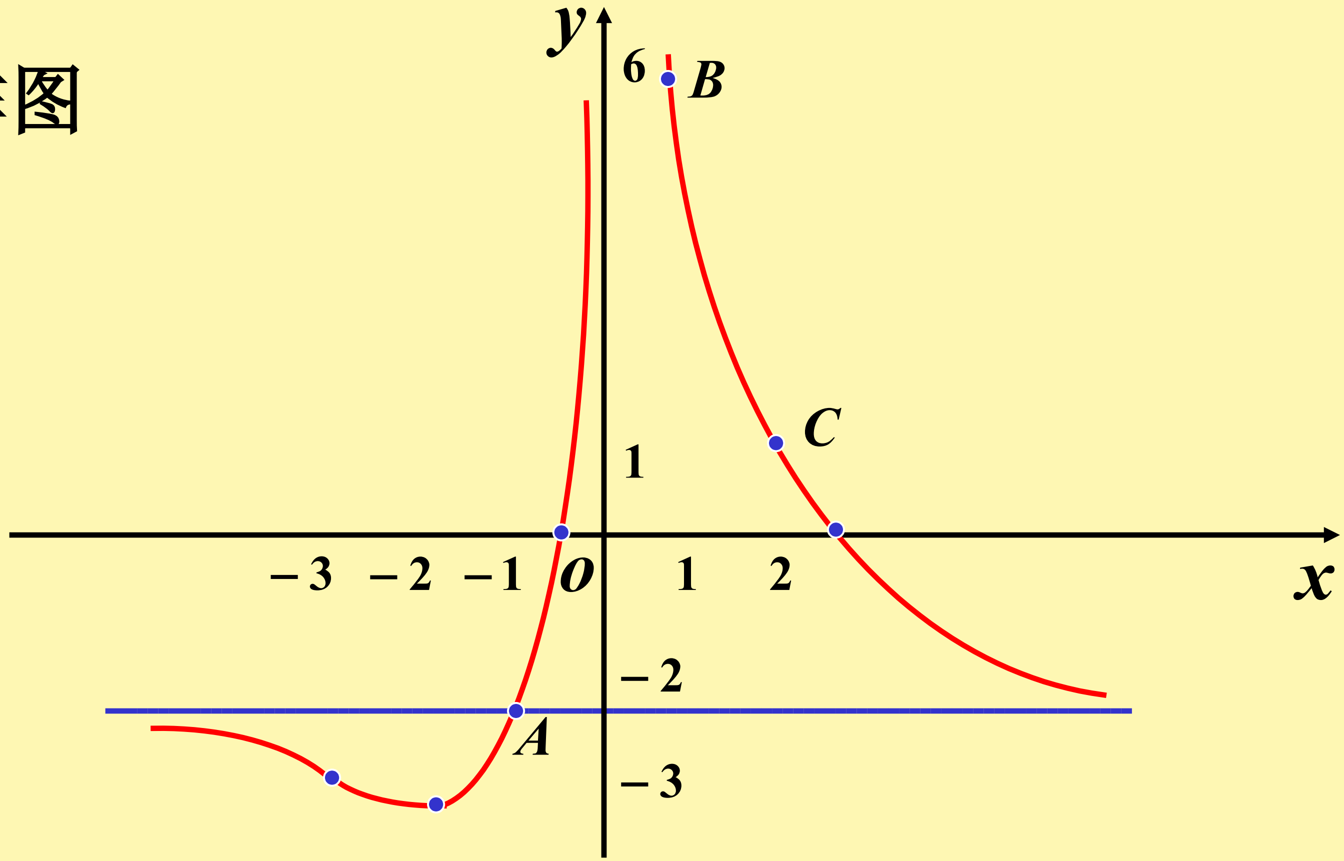
列表确定函数单调区间，凹凸区间及极值点和拐点：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$		极值点 -3		间断点	

补充点： $(1-\sqrt{3},0)$， $(1+\sqrt{3},0)$;

$A(-1,-2)$， $B(1,6)$， $C(2,1)$.

作图



内容小结

1、掌握判断曲线凹凸性的方法，会求曲线的拐点，并会用凹凸性证明不等式.

2、 会求曲线的渐近线，会作出函数的图形。

习题 3-5