第 4 章　　　　不定积分

4.1　不定积分的概念与性质

4.1.1　原函数的概念

4.1.2　不定积分的概念

4.1.3　基本积分表

4.1.4　不定积分的性质

4.1 不定积分的概念与性质

4.1.1 原函数的概念

1、定义 4.1.1： 如果在区间 I 内，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即 $\forall x \in I$，都有 $F'(x) = f(x)$

或 $dF(x) = f(x)dx$， [illegible]

[illegible]

例 $(\sin x)' = \cos x$

$\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数。

显然：$(\sin x + C)' = \cos x$，所以，$\sin x + C$ 也是 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数。

当$x>0$时，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

故$\ln x$是$\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上的原函数。

当$x<0$时，$(\ln(-x))' = \dfrac{1}{x}$

故$\ln(-x)$是$\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)$上的原函数。

注：原函数与区间有关。

2．几个问题

（1） 原函数存在定理：

如果函数$f(x)$在区间I上连续，则$f(x)$在区间I上一定存在原函数，即存在$F(x)$，使对任一$x\in I$，有$F'(x)=f(x)$ （下一章将证明）

“连续函数一定有原函数”

条件是充分而非必要的。

例如

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处间断，但在 $(-\infty, +\infty)$ 内处

有

$$F'(x)=f(x)$$

（2）如 $f(x)$ 在 I 上有原函数，那么有多少？

$$设在 I 内 F'(x)=f(x), 则 (F(x)+C)'=f(x)$$

其中 C 为任意常数。

（3）完备性问题

设 $F(x), G(x)$ 都是 $f(x)$ 在 I 上的原函数则 $\forall x \in I$，有，

$$[G(x)-F(x)]' = G'(x)-F'(x)$$
$$= f(x)-f(x)=0$$

所以 $G(x) - F(x)$ 在 I 上为一常数 C_0，

即 $G(x) = F(x) + C_0$。

这说明，函数族 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的全体原函数的集合，它可表示 $f(x)$ 在 I 上的任一原函数。

4.1.2　不定积分的概念

1、定义 4.1.2　在区间 I 上 $f(x)$ 的带任意常数项的原函数（原函数的全体）称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在 I 上的不定积分，记 $\int f(x)dx$

如 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则有

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int \boxed{f(x)dx} = F(x) + C$$

积分号

被积函数

被积表达式

积分变量

任意常数

例 1　求 $\int x^5 dx.$

解　$\because \left(\dfrac{x^6}{6}\right)' = x^5,\qquad \therefore \int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C.$

例 2　求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx.$

解　$\because \quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2},$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

例 3 求 $\int \frac{1}{x} dx$

解： 当$x > 0$时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

当$x < 0$时，$(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$

将上两结果结合起来，有 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

问题：如果 $f(x)$ 的定义域由几个无公共点的区间构成，在每个区间上 $f(x)$ 均连续，那么 $\int f(x) dx$ 要我们求什么？

(i) 如题目不作区间限制，应在每个区间上求 $f(x)$ 的原函数族（不定积分）。

(ii) 不同区间上 $f(x)$ 的原函数族的表达式有时可统一，则不必注明区间；有时无法或难以统一，则应分区间讨论。

例如 $\int \sec^2 x dx = \tan x + C, x \in (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$

一般 $\int \sec^2 x dx = \tan x + C,$

2、积分常数的几何意义

从下面的例子说起

例 4 设曲线通过点（1， 2），且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程

解 设曲线方程为 $y = f(x)$,

根据题意知 $\dfrac{dy}{dx} = 2x,$

$\because \int 2x\,dx = x^2 + C,\ \therefore f(x) = x^2 + C,$

由曲线通过点（1， 2）$\Rightarrow C = 1,$

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1.$

显然，求不定积分得到一积分曲线族.

其中任一条曲线可由另一条曲线上下平移而得到。

3、积分、微分之间的关系

由不定积分的定义，可知

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x),\qquad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C\qquad \int dF(x)=F(x)+C$$

结论： 微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

4.1.3、 基本积分表

基本积分表 ❶

(1) $\int k\,dx = kx + C$ （k是常数）

(2) $\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C;$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$

(6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

$$(8)\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9)\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(10)\quad \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11)\quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12)\quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(13)\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

4.1.4、不定积分的性质

性质1 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（此性质可推广到有限多个函数之和的情况）

性质 2 $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$

不定积分的计算

“直接积分法”—— 利用基本积分公式及积分的线性性质而计算不定积分的方法。

例 1 $\int \sqrt[3]{x^2}(x - 2x^2)dx$

解：原式 $= \int (x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{8}{3}})dx = \int x^{\frac{5}{3}}dx - 2\int x^{\frac{8}{3}}dx$

$$= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{3}} + C$$

例 2 . $\int 2^x e^x dx$

解：原式 $=\int (2e)^x dx = \dfrac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \dfrac{2^x e^x}{1+\ln 2} + C$

例 3　求积分 $\int \left(\dfrac{3}{1+x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

解

$$\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$= 3\int \frac{1}{1+x^2}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= 3\arctan x - 2\arcsin x + C$$

例 4　求积分 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx$

$= \int \left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx$

$= \arctan x + \ln|x| + C.$

例 5. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx$

$= \int (1-\frac{1}{1+x^2})dx$

$= x - \arctan x + C$

例 6. $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$

例 7. $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{4}{\sin^2 x} dx = -4\cot x + C$

例 8 $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx. = \int \frac{1}{1 + 2\cos^2 x - 1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C.$$

例 9 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan x - \cot x + C$$

注：(1): 检验：求导验证。

(2): 基本方法 :1) 对照积分表，变换被积函数。

2) 变换技巧：对分式添项，拆项，对三角函数进行三角变换。

习题 4 - 1

4.2　换元积分法

4.2.1　第一类换元法

4.2.2　第二类换元法

4.2.1、第一类换元法（凑微法）

1　定理 4.2.1　设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，则有

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$$

证明：$dF[\varphi(x)] = F'[\varphi(x)]d\varphi(x)$

$$= f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx$$

所以

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$$

如何应用此定理?

要计算不定积分 $\int g(x)dx$

若有$g(x) = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ 则

$$\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

$$\underline{\underline{u=\varphi(x)}}\ \int f(u)du = [F(u)+C]_{u=\varphi(x)}$$

$$= F[\varphi(x)] + C$$

在此过程中，积分变量从 x 换为 u ——“换元”

问题的关键是从 $g(x)\,dx$“凑出”$\varphi'(x)dx = d\varphi(x) = du$

而使被积表达式 $g(x)\,dx$ 变成 $f(u)\,du$ ——“凑微分法”。

2． 例

题型一

例 1 $\int(2x+3)^{50}dx=\frac{1}{2}\int(2x+3)^{50}d(2x+3)$

$$\xlongequal{u=2x+3}\frac{1}{2}\int u^{50}du=\frac{1}{102}u^{51}+C$$

$$=\frac{1}{102}(2x+3)^{51}+C$$

例 2 $\int\cos(2x-\frac{\pi}{6})dx=\frac{1}{2}\int\cos(2x-\frac{\pi}{6})d(2x-\frac{\pi}{6})$

$$=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})+C$$

例 3 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} d(\frac{x}{a})$

$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

类似 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} d\frac{x}{a} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

一般　　　若 $\int f(x)dx = F(x) + C$

则有 $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$

$= \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

题型二 例 4 $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)$

$$= -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

例 5 $\int x\sqrt{1+2x^2}dx = \frac{1}{4}\int (1+2x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+2x^2)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

一般 $\int xf(ax^2+b)dx = \frac{1}{2a}\int f(ax^2+b)d(ax^2+b)\cdots$

$$\int x^{n-1}f(ax^n+b)dx = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)\cdots$$

题型三

例 6 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x} = 2e^{\sqrt{x}} + C$

一般 $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int f(\sqrt{x})d\sqrt{x}$

题型四

例 7 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x) = \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C.$

例 8 求$\int \frac{1}{1+e^x}dx.$ $=\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$$=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\int dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$=\int dx-\int\frac{1}{1+e^x}d(1+e^x) = x-\ln(1+e^x)+C.$$

一般 $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x,$

$$\int f(a\ln x+b)\frac{1}{x}dx=\frac{1}{a}\int f(a\ln x+b)d(a\ln x+b),$$

$$\int f(e^x)e^x dx=\int f(e^x)de^x$$

$$\int f(ae^x+b)e^x dx=\frac{1}{a}\int f(ae^x+b)d(ae^x+b)$$

题型五

例 9 $$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

类似地 $$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

例 10 $$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

例 11 $$\int \sin^3 x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d\cos x$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

例 12 $\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2})dx$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x) + C$$

例 13 $\int \cos 3x \cos 2x dx.$

解 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)],$

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x),$$

$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

例 14 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx.$

解 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x)$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

说明 1、当被积函数是三角函数相乘时，拆开奇次项去凑微分，偶次降次.

2、$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(\sin x) d\sin x.$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = -\int f(\cos x) d\cos x.$$

$$\int f(\tan x) \cdot \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d\tan x.$$

例 15 $\int \csc x dx = \int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x}$

法一 $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$$

NJUPT

法二 $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}dx+\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx=\int\frac{-d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\int\frac{d\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

法三 $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=-\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}[\int\frac{d\cos x}{\cos x-1}-\int\frac{d\cos x}{\cos x+1}]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{1+\cos x}\right|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

注： $$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a})dx$$

$$=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$$

类似地可得

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2}[\int \frac{d\sin x}{\sin x - 1} - \int \frac{d\sin x}{\sin x + 1}]$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2 x - 1}{(\sin x + 1)^2}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\cos^2 x}{(\sin x + 1)^2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin x + `1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

例 16　$f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$,　求$f(x)$

解　令　$u = \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - u$,

$$f'(u) = 1 - u,$$

$$f(u) = \int (1-u)du = u - \frac{1}{2}u^2 + C,$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

内容小结

1. 对一些常用的凑微分形式要熟悉.

(1)、$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$

(2)、$\int x^{n-1}f(ax^n+b)dx=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$

(3)、$\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\int f(\sqrt{x})d\sqrt{x}$

(4)、$\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}dx=-\int f(\frac{1}{x})d\frac{1}{x}$

(5)、$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x,$

$$(6)、\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)de^x$$

$$\int f(ae^x + b)e^x dx = \frac{1}{a}\int f(ae^x + b)d(ae^x + b)$$

$$(7)、\int f(\sin x)\cdot \cos x dx = \int f(\sin x)d\sin x$$

$$\int f(\cos x)\cdot \sin x dx = -\int f(\cos x)d\cos x$$

$$\int f(\tan x)\cdot \sec^2 x dx = \int f(\tan x)d\tan x$$

$$(8)、\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d\arctan x$$

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d\arctan x$$

2. 补充公式要熟记

(1)、$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2)、$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$

(3)、$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C$

(4)、$\int \tan x dx = -\ln|\cos x|+C;$

(5)、$\int \cot x dx = \ln|\sin x|+C;$

(6)、$\int \sec x dx = \ln|\sec x+\tan x|+C;$

(7)、$\int \csc x dx = \ln|\csc x-\cot x|+C;$

3. 积分结果形式上可能不统一，求导检验。

4. 多练、多思

习题 4 - 2