4.2.2、第二类换元法

1、引入

第一类换元法

$$\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx$$

$$\xlongequal{u=\varphi(x)} \int f(u)du = [F(u)+C]_{u=\varphi(x)}$$

$$= F[\varphi(x)] + C \qquad （1）$$

有时会遇到相反的情况：

$$\int f(x)dx \underline{\underline{x=\varphi(t)}} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt$$

$$= [G(t)+C]_{t=\varphi^{-1}(x)} = G[\varphi^{-1}(x)] + C \qquad （2）$$

要使（2）成立，应满足一定条件：

(i) $f[\varphi(t)]\varphi'(t) = g(t)$ 的原函数 $G(t)$ 较易求得；

(ii) 要将$t=\varphi^{-1}(x)$ 代回到 $G(t)$ 中去，故函数

$x=\varphi(t)$应在相应区间上单调、可导，且$\varphi'(t)\neq 0$

2、定理 4.2.2 设$x=\varphi(t)$是某区间内的单调，可导函数

且$\varphi'(t)\neq 0$，又设函数$f[\varphi(t)]\varphi'(t)=g(t)$具有原函数

$G(t)$，则有换元公式

$$\int f(x)dx \underline{\underline{x=\varphi(t)}} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int g(t)dt$$

$$=[G(t)+C]_{t=\varphi^{-1}(x)}=G[\varphi^{-1}(x)]+C$$

证明：

$$\frac{d}{dx}[G[\varphi^{-1}(x)]]=\frac{dG[\varphi^{-1}(x)]}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=g(t)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$=f[\varphi(t)]=f(x)$$

3、第二类换元法应用举例

题型一　例 1　求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0)$

解:　令 $x=a\sin t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad dx=a\cos t\,dt$

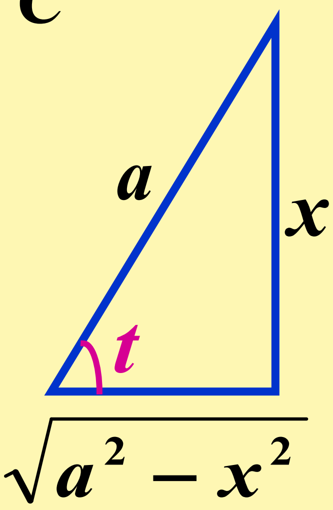
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a})+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}+C$$



例 2 求 $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx.$

解 令 $x=2\sin t \quad dx=2\cos t\,dt \quad t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

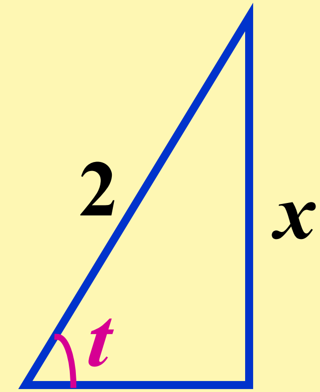
$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\int(2\sin t)^3\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$$

$$=32\int\sin^3 t\cos^2 t\,dt=32\int\sin t(1-\cos^2 t)\cos^2 t\,dt$$

$$=-32\int(\cos^2 t-\cos^4 t)d\cos t$$

$$=-32\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t\right)+C$$

$$=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5+C.$$



$\sqrt{4-x^2}$

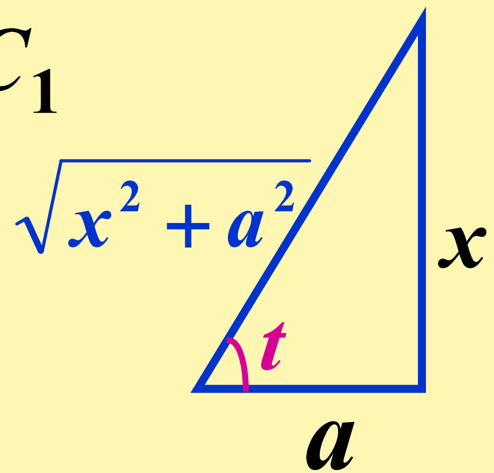
题型二　例 3　求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0).$

解　令 $x = a\tan t \Rightarrow dx = a\sec^2 t dt \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t dt$$

$$= \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}) + C_1.$$



$$= \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

例 4 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx \quad (a>0).$

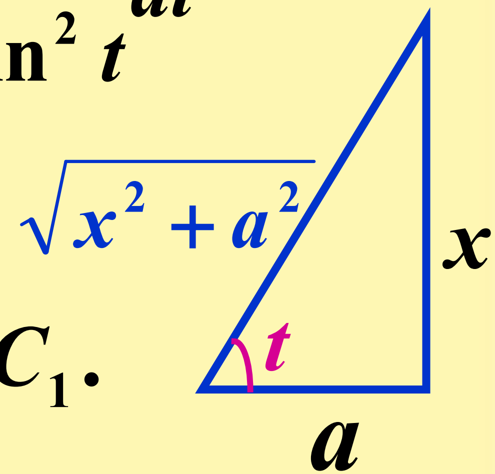
解 令 $x = a\tan t \Rightarrow dx = a\sec^2 t dt \quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sec^3 t}{\tan^2 t}dt = \int \frac{1}{\sin^2 t\cdot\cos t}dt$$

$$= \int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}dt = \int \sec t dt + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$= \ln|\sec t+\tan t| - \frac{1}{\sin t} + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C_1.$$



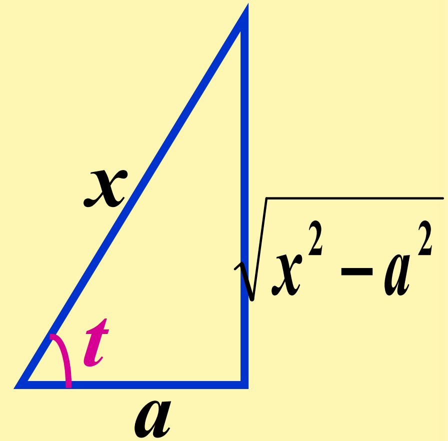
$$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C.$$

题型三 例5 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0).$

解 $D_f = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

当 $x \in (a,+\infty)$ 时，令 $x = a\sec t$

$dx = a\sec t \tan t dt \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$



$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a\sec t \cdot \tan t}{a\tan t}dt$$

$$= \int \sec t dt \quad = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}) + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

当$x\in(-\infty,-a)$时，令 $x=-u$，则 $u\in(a,+\infty)$

$$\text{原式}=-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=-\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right|+C_1=\ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}-x}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{-a^2}\right|+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

$$\therefore\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

例 6 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

解 $D_f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

当$x \in (3,+\infty)$时，令$x = 3\sec t$

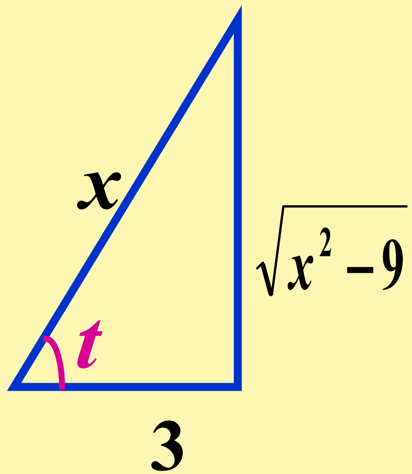
$dx = 3\sec t \tan t dt \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = 3\int \tan^2 t dt = 3\int \sec^2 t dt - 3\int dt$$

$$= 3\tan t - 3t + C$$

$$= 3\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - 3\arccos\frac{3}{x} + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{x} + C$$



当$x<-3$时，令$x=-t$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{t^2-9}}{t}dt$$

$$= \sqrt{t^2-9} - 3\arccos\frac{3}{t} + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{-x} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{|x|} + C$$

说明（1）以上几例所使用的均为三角代换.

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x = a\sin t$; $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x = a\tan t$; $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x = a\sec t$.

$x > a$时, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ $x < -a$时，令$x = -u$

为什么要讲上面三种情况？

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ 通过配方，可化为上面三种情况之一。

例 7 $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2}}$$

$$=\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+C$$

说明（2） 我们把一些结论作为基本积分表二

基本积分表❷

(14) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$

(15) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C;$

(16) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

(17) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C;$

(18) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$

(19) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

(20) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

例 8 $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C;$$

例 9 $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-9}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{4x^2-9}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}dx$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{d(4x^2-9)}{\sqrt{4x^2-9}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-3^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2-9} + \frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2-9}) + C$$

说明 (3) 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换并不是绝对的，需根据被积函数的情况来定．

题型四 **例 10** 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ （三角代换很繁琐）

解 令 $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1, xdx=tdt,$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{(t^2-1)^2}{t}tdt=\int (t^4-2t^2+1)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

例 11 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2-1,$

$$x=\ln(t^2-1), \quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{2}{t^2-1}dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right) - x + C.$$

题型五 当分母 x 的次数较高时，可采用**倒代换** $x=\frac{1}{t}$.

例 12 **求** $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$

解: 令 $x=\frac{1}{t}$ 则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\text{原式}=\int t^4\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int (a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot|t|\,dt$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\operatorname{sgn}t\int (a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}d(a^2t^2-1)$$

$$=-\frac{1}{3a^2}\operatorname{sgn}t(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+C$$

内容小结

1. 常用的代换： (1) $t=\sqrt[n]{\quad}$.根式整体代换

(2) 三角代换

(i) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x=a\sin t;\quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(ii) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x=a\tan t;\quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(iii) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\sec t.$

$x>a$时, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ $x<-a$时，令$x=-u$

(3) 倒代换 $x=\frac{1}{t}$

2. 基本积分表 (2) 要熟记 习题 4-2

4.3　分部积分法

1、分部积分法

设 $u=u(x)$，　$v=v(x)$ 具有连续的导函数，则有

$$d(uv)=vdu+udv$$

$$udv=d(uv)-vdu$$

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (1)$$

或 $$\int uv'dx=uv-\int u'vdx \qquad (2)$$

公式（1）、（2）都叫做分部积分公式。

题型一 例 1　求积分 $\int x\cos x dx$.

解 $\int x\cos x dx = \int x d\sin x$

$= x\sin x - \int \sin x dx$

$= x\sin x + \cos x + C.$

例 2　求积分 $\int x^2 e^x dx.$

解 $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$

（再次使用分部积分法）

$= x^2 e^x - 2\int x de^x$

$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$

注：形式(1) $\int x^n e^x dx, \int x^n \sin x dx, \int P_n(x)\cos ax dx$

例3 求积分 $\int x\cos^2 xdx$.

解

原式 $=\int x\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}[\int xdx+\int x\cos 2xdx]$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\int xd\sin 2x$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int \sin 2xdx$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$$

注：有时须对被积函数进行变形.

题型二　例 4 求 $\int x\arctan x dx$.

解 $\int x\arctan x dx$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} d(\arctan x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例 5 $\int x^3 \ln x dx.$

解 $\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}\int \ln x dx^4$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

注2：形式(2) $\int x^n \ln x dx, \int x^n \arcsin x dx, \int P_n(x) \arctan dx$

例 6 求 $\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

解：原式 $=x\ln(1+x^2)-\int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$

$$= x\ln(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= x\ln(1+x^2)-2(x-\arctan x)+C$$

注：有时把 dx 当成 dv 进行分部积分.

题型三 例 7 求积分 $\int e^x \sin x dx$.

解 $\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x$

$= e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x)$

$= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$

注意循环形式

$$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

例 8 求 $\int\sqrt{1+x^2}dx$

解 $\int\sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}dx + \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}dx + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$= \frac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2}] + C$

“还原法” $\int f(x)dx = \cdots = g(x) + k\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{1-k}g(x) + C \quad（k \neq 1）$$

题型四 例9 $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解法一 $x = \sin t$ $\quad dx = \cos t dt \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

原式 $= \int \frac{\sin t \cdot t \cdot \cos t dt}{\cos t} = -\int t d\cos t$

$$= -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$$

注：与换元积分法配合使用计算积分。

解法二 原式 $= -\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$$

例 10　求 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

解法一　原式 $= \int xe^x d(\frac{-1}{x+1})$

$$= \frac{-xe^x}{x+1} + \int \frac{1}{x+1} \cdot (e^x + xe^x)dx$$

$$= \frac{-xe^x}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C$$

注：　凑微分的目的，一是能直接积分，二是可以进行分部积分。

解法二 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{(x+1)e^x - e^x}{(1+x)^2}dx$

$$= \int \frac{e^x}{1+x}dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{1}{1+x}de^x - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$$

$$= \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx = \frac{e^x}{1+x} + C$$

“消抵法”： $\int f(x)dx = \cdots = g(x) + \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

$$= g(x) + \int f_1(x)dx + h(x) - \int f_1(x)dx$$

$$= g(x) + h(x) + C$$

注：注意各种方法的结合使用．

题型五　例 11计算$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$的递推公式　$(n\geq 2)$

解：$I_{n-1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\int x\cdot\frac{-(n-1)\cdot 2x}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}]dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)I_{n-1}-2(n-1)a^2I_n$$

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}]$$

n 依次递减　直至　$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

题型六

例 12 已知$f(x)$的一个原函数为e^{-x^2}，求$\int xf'(x)dx$

解 $$\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx,$$

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C,$$

又 $$f(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$\therefore \int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$$

$$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

内容小结

1、掌握分部积分法

$$\int f(x)dx = \int uv'dx = \int udv = uv - \int vdu$$

u 、 v 的选取原则：

(1) $v'dv$易凑微分得dv.

(2) “对、反、幂、三、指”，前者为 u.

(3) “还原法”，“抵消法”。

2、会综合运用各种积分方法计算积分.

作业： 习题 4-3