4.4　几类特殊函数的积分

4.4.1　　有理函数的积分

4.2.2　　三角函数有理式的积分

4.3.3　　简单无理函数的积分

4.4.1、有理函数的积分

1．有理函数的分解

有理函数　**两个多项式的商表示的函数**.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

$(a_0b_0\neq 0)$

(1)

(i) 如存在 x_0 使 $P_n(x_0)=Q_m(x_0)=0$；这说明它们有公因子 $(x-x_0)$，可约去。

(ii) 如 $n<m$，这有理函数是**真分式**，如 $n\geq m$，则可将其化为一个多项式加上一个有理真分式的形式；

例
$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

所以下面不妨假设 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 是既约真分式。

（2）有理函数的分解

若 $Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}$

$\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}$

（其中 $p^2-4q<0$， $r^2-4s<0$），

则 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 可分解成如下部分分式之和：

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots$$

$$+ \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \cdots$$

$$+ \frac{R_1 x + S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \cdots$$

$$+ \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu} \qquad (2)$$

其中 A_i， $\cdots$， B_i， M_i， N_i， $\cdots$， R_i， S_i 等都是常数

N J U P T

例1. (a) $$\frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

(b) $$\frac{x^3-1}{(x+1)^3(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}$$

其中 A_1、A_2、A_3，B_1，C_1，B_2，C_2 是待定常数。

（3）系数如何确定

方法一：比较系数法。

两端去分母，比较同次幂的系数得方程组，解方程组可得。 对于例 1 中的 (a), 去分母得

$$x-2=A(x^2+2)+(x+1)(Bx+C)$$

$$=(A+B)x^2+(B+C)x+(2A+C) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=1 \\ 2A+C=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=0 \end{cases}$$

于是 $$\frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x}{x^2+2}$$

方法二：赋值法。

去分母后所得恒等式中代入 x 的特殊值从而求出待定系数。

$$x-2 = A(x^2+2)+(x+1)(Bx+C) \qquad (3)$$

在（3）式中，令 $x=-1$ 得 $-3=3A$， $A=-1$，

令 $x=0$，得 $-2=2A+C$， $C=0$

令 $x=1$，得 $-1=3A+2(B+C)$， $B=1$ 。

2．积分法

有理函数分解成四种类型的部分分式之和：

$$(1)\ \frac{A}{x-a} \qquad (2)\ \frac{B}{(x-a)^n}$$

$$(3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

前两种类型的公式的积分易，后面的两类通过实例讲方法。

例 1 求积分 $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}dx$

解 $$\frac{x-2}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$$

$$=\frac{\frac{5}{4}}{x+3}+\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}=\frac{1}{4}[\frac{5}{x+3}-\frac{1}{x-1}]$$

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}dx=\int \frac{1}{4}[\frac{5}{x+3}-\frac{1}{x-1}]dx$$

$$=\frac{1}{4}[5\ln|x+3|-\ln|x-1|]+C$$

例 2 求积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx.$

解 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$

$$= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right]dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + C.$$

例 3 求积分 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx$

解 原式 $= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

例 4 求积分 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^n}dx = ?\quad (n \geq 2)$

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)^n} - 3\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^n}$

$$= \frac{1}{2(1-n)}(x^2+2x+3)^{-n+1} - 3\int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+2]^n}$$

后一个可视为 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

方法：利用分部积分得递推公式可得 .

3．说明：

(1) 有理函数的原函数都是初等函数．

(2) 有些初等函数尽管原函数存在，但无法表成初等函数，如

$$\frac{\sin x}{x}, \sin x^2, e^{x^2}, \sqrt{1+x^3},$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\ (0<k<1), \frac{1}{\ln x}, \sqrt{\sin x}\text{等}.$$

(3) 上面给出了有理函数积分的一般方法，但往往不是最好的方法，特别是在分母的次数较高时．

例 5 求积分 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)} = ?$

解法一： 原积分 $= \frac{1}{2}\int \frac{2+x^{10}-x^{10}}{x(2+x^{10})}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{20}\int \frac{d(x^{10}+2)}{(x^{10}+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\ln(x^{10}+2) + C$$

解法二： 原积分$= \int \frac{x^9 dx}{x^{10}(x^{10}+2)} = \frac{1}{10}\int \frac{dx^{10}}{x^{10}(x^{10}+2)}$

$$\underline{\underline{x^{10}=t}}\ \frac{1}{20}\int (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2})dt = \frac{1}{20}\ln(\frac{x^{10}}{x^{10}+2}) + C$$

4.4.2、三角函数有理式的积分 三角有理式的定义：

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之．一般记为 $R(\sin x, \cos x)$

"万能代换"：令 $u = \tan\frac{x}{2}$，则

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2} \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

于是 $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}du$

右侧是 u 的有理函数的积分问题。

2、例题

例 1 $$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$$

解： 原式 $\underline{\underline{令 u=\tan\frac{x}{2}}}$ $$\int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int \frac{1+u^2+2u}{2u}du=\frac{1}{2}\int\left(u+2+\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

注：对于$\int R(\sin x, \cos x)dx$

若$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$，令$t = \tan x$

$\because$ **在这种情况下，** $R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin^2 x, \cos^2 x)$

$$\therefore \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$dt = \sec^2 x dx = (1 + \tan^2 x)dx, \Rightarrow dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$$

$$R(\sin x, \cos x) = R_1\left(\frac{t^2}{t^2 + 1}, \frac{1}{t^2 + 1}\right)\frac{1}{t^2 + 1} dt$$

例 2 计算$\displaystyle\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}$

解: $$\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}\ \overset{令t=\tan x}{=\!=\!=\!=}\ \int\frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{1}{2+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

另解: $$\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\frac{2}{\cos^2 x}-\tan^2 x}$$

$$=\int\frac{1}{2\sec^2 x-\tan^2 x}d\tan x=\int\frac{1}{2+\tan^2 x}d\tan x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

4.4.3、简单无理函数的积分

1． 形如 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$ 和$R(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}})$的积分

前者令 $\sqrt[n]{ax+b}=u$

则$x=\dfrac{u^n-b}{a}$, $dx=\dfrac{n}{a}u^{n-1}du$

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx=\int R(\frac{u^n-b}{a},u)\cdot\frac{n}{a}u^{n-1}du$$

被积函数是 u 的有理函数。

后者令 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}=u$ 则$x=\dfrac{b-eu^n}{cu^n-a}$, $\cdots$

被积函数同样可化为是 u 的有理函数。

例 1　计算$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

解：令$\sqrt{x-1}=u$　则$x=u^2+1, dx=2udu$

$$\text{原式}=\int \frac{u}{u^2+1}\cdot 2udu = 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du$$

$$=2u-2\arctan u+C$$

$$=2(\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1})+C$$

例 2　计算　$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$

解：令$\sqrt{\frac{x+1}{x}}=u$, 则$x=\frac{1}{u^2-1}$, $dx=\frac{-2u}{(u^2-1)^2}du$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}}=u,\text{则 } x=\frac{1}{u^2-1},\ dx=\frac{-2u}{(u^2-1)^2}du$$

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx=\int(u^2-1)u\frac{-2u}{(u^2-1)^2}du=-2\int\frac{u^2}{u^2-1}du$$

$$=-2\int(1+\frac{1}{u^2-1})du=-2(u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|)+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}+2\ln(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1)+\ln|x|+C$$

内容小结

1 、掌握三类特殊函数的积分

习题 4.4