第 5 章　定积分及其应用

5.1 定积分的概念

5.1.1 引例

5.1.2 定积分的定义

5.1.3 定积分的几何意义

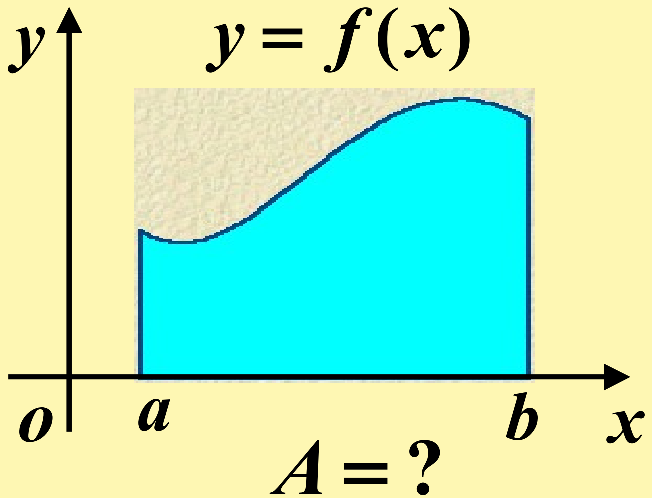
5.2 定积分的性质

5.1 定积分的概念

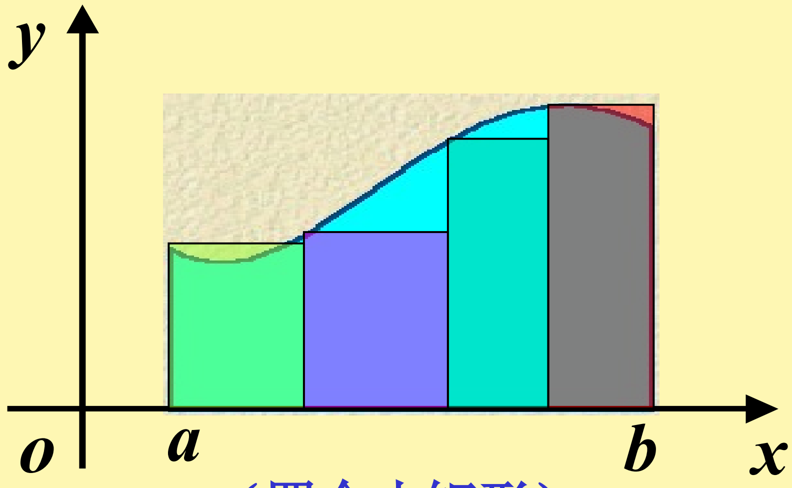
5.1.1 定积分的概念的引入

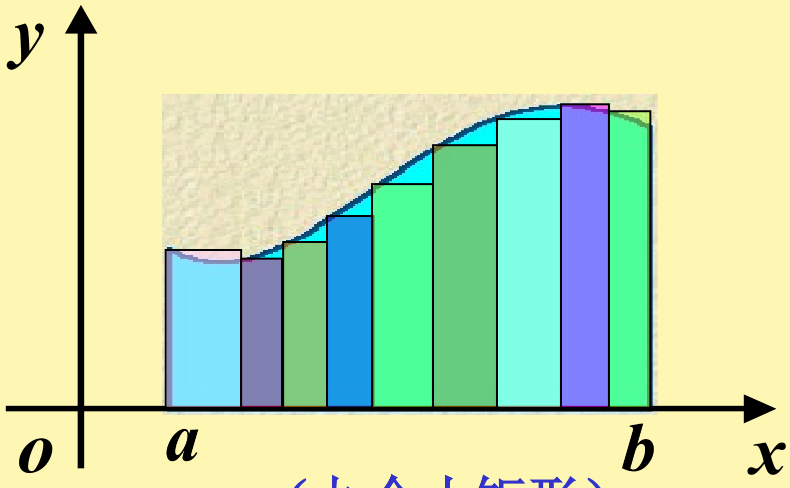
实例 1 （求曲边梯形的面积）

设曲边梯形是由连续曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$及x轴，以及两直线 $x=a$，$x=b$ 所围成，求其面积 A.



方法：用矩形面积近似取代曲边梯形面积





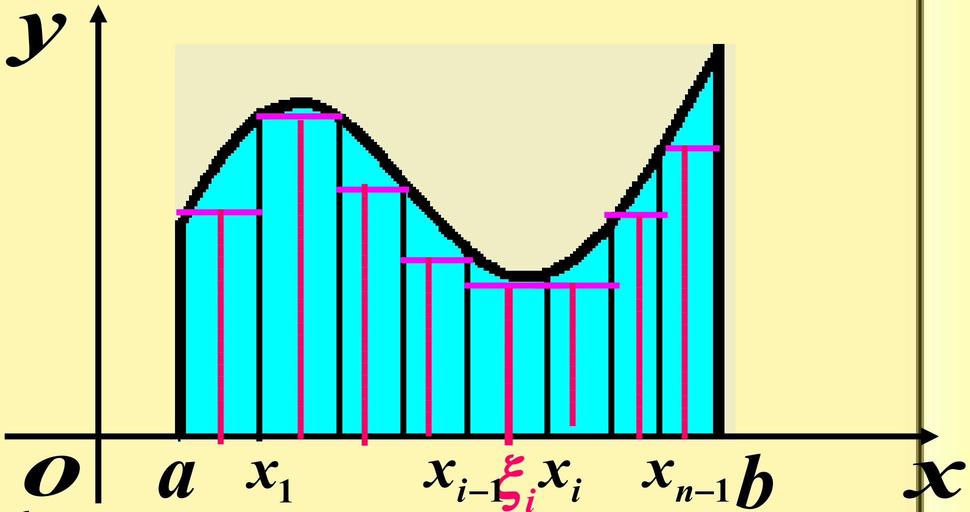
显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

具体步骤：

(1) 分割(大化小)：**在区间** $[a,b]$ 内插入若干个分点，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

用直线$x = x_i$**将曲边梯形分成**n**个小曲边梯形，底边长度为**$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$；



(2) 近似(**常代变**)：在每个**小区间** $[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 ξ_i，

以 $[x_{i-1}, x_i]$**为底**，$f(\xi_i)$ **为高的小矩形面积近似小曲边梯形的面积**：

$$A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

(3) 求和 (近似和)：曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4) 取极限：当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$,趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时，

曲边梯形面积为 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

实例 2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程

具体步骤：

（1）分割 $T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$

$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$

（2）近似 $\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（4）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

上述两个问题的共性：

- 解决问题的方法步骤相同 ：

  “大化小 ，常代变 ，近似和 ，取极限 ”

- 所求量极限结构式相同：特殊乘积和式的极限

5.1.2 定积分的定义

1. 定义 5.1.1

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上有界若对 $[a,b]$ 的任一种分法

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，

任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，只要 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I 则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$

即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

积分上限 $[a, b]$ **称为积分区间**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

注： 定积分仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量用什么字母表示无关．

即 $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

2. 存在定理

定理 1. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

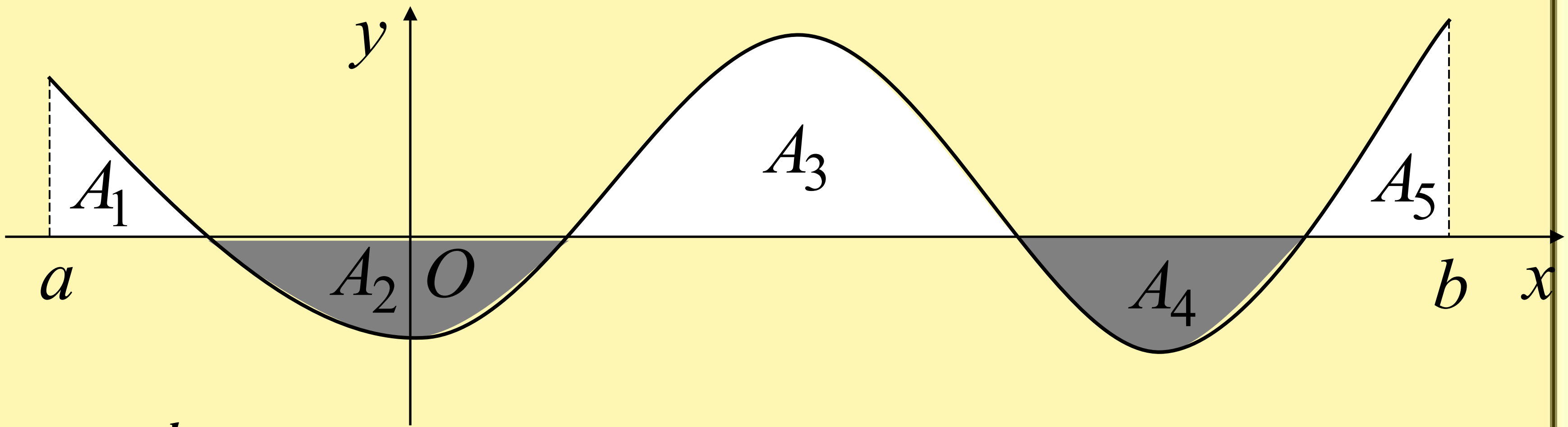
定理 2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个断点，

$\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.　（证明略）

3. 几何意义

$f(x)>0,\quad \int_a^b f(x)dx = A$　曲边梯形的面积

$f(x)<0,\quad \int_a^b f(x)dx = -A$　曲边梯形的面积的负值



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

它是介于 x 轴、曲线$y=f(x)$ 及两条直线 $x=a$, $x=b$ 之间的各部分面积的代数和. 在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号 .

例 1 利用定义计算定积分$\int_0^1 x^2 dx$.

解 将 $[0,1]$ n 等分，分点为 $x_i = \frac{i}{n}$，$\Delta x_i = \frac{1}{n}$

$(i = 0, 1, \cdots, n)$ 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$，

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

$\lambda \to 0 \Rightarrow n \to \infty$

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

利用定积分的定义可以求和式的极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}\right)$$

特别

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

例 2　用定积分表示下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

解　原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{i}{n})^p\dfrac{1}{n}=\int_0^1 x^p\,dx$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n-1}{n}\pi)$

解　原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\sin\dfrac{i-1}{n}\pi\cdot\dfrac{1}{n})=\int_0^1\sin\pi x dx$

注 $\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{i}{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i-1}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$\text{或原极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{(i-1)\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx$$

利用 $\int_0^a f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}a\right)$

5.2　定积分的性质

对定积分的**补充规定**：

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

说明　在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小.

性质 1　$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

性质 2　[illegible]

性质 1, 2 称为线性性质

性质 3（对区间的可加性） 假设 $a<c<b$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

注：不论 a,b,c 的相对位置如何，上式总成立.

例 若 $a<b<c$,

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

则 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

性质 4 $\int_a^b 1\cdot dx = \int_a^b dx = b - a$.

性质 5（保号性或不等式性质）

若在$[a,b](a<b)$上，有$f(x)\ge 0$,

则 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

性质 5 的推论

:（1）（保序性）若在区间$[a,b]$上，$f(x)\le g(x)$,

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(2) 若$f(x)$连续，$f(x)\ge 0$且不恒为0，则 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

证明 $\because f(x)$在$[a,b]$**上不恒为**0, $\exists x_0 \in [a,b]$使得

$$f(x_0) > 0.$$

取$\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ 由 $f(x_0)>0$ 的连续性知，存 $\delta > 0$

在

当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{f(x_0)}{2}$

即$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$， $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$

于是

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx$$

$$\geq 0 + \frac{f(x_0)}{2} \cdot 2\delta + 0 = f(x_0) \cdot \delta > 0$$ 得证。

例 1 比较$\int_0^1 e^x dx$与$\int_0^1 (1+x)\,dx$之大小.

解 令 $\varphi(x)=e^x-1-x$, $\varphi(x)$在[0,1]上连续,可导。

$$\varphi'(x)=e^x-1$$

当$x>0$时，$\varphi'(x)>0,\Rightarrow \varphi(x)\uparrow$ 而$\varphi(0)=0$

故在上$[0,1]$ $\varphi(x)\ge 0$,

（等于仅在 $x=0$ 处 成立 ）

所以$\int_0^1 (e^x-1-x)\,dx>0$,

于是有$\int_0^1 e^x dx>\int_0^1 (1+x)\,dx$

性质 5 的推论：

（3） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad (a<b)$

证明 $\because \; -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$$\therefore \; -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

性质 6　估值定理

$M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$，$m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a)\quad (a<b)$$

证明　$\because\ m\le f(x)\le M,$

$$\therefore\ \int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M\,dx,$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

例 2　估计积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ 的值.

解

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

$f(x)$在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上单调 递减,

[illegible]

$$M=f(\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\quad m=f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi},\quad \because\ b-a=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

性质 7（定积分中值定理）

[redacted]

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $\quad (a \le \xi \le b)$

证明 $\because \ m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$$\therefore \ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

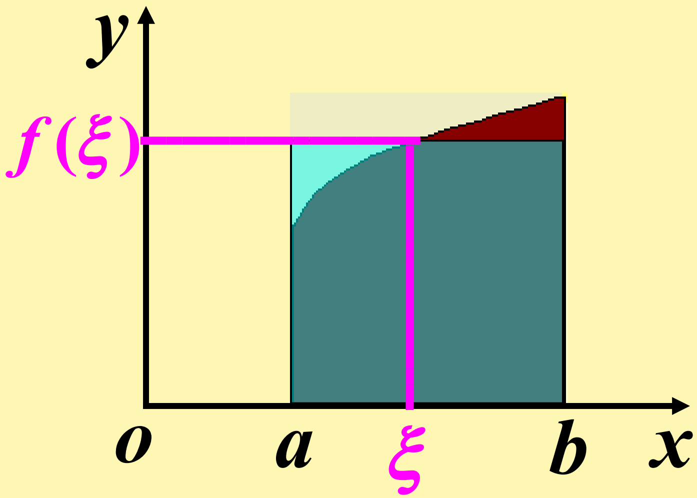
由闭区间上连续函数的介值定理知

[redacted]

使 $\quad f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$

即 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$ $\quad (a \le \xi \le b)$

积分中值公式的几何解释：



[illegible]

[illegible]

底边， 以曲线 $y=f(x)$

为曲边的曲边梯形的面积

[illegible]

的一个矩形的面积。

推广的定积分中值定理（第一积分中值 定理）

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，

则存在 $\xi\in[a,b]$

使 $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

例 3 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt$.（积分型极限）

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[x, x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)=6.$$

例 4 设 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上连续，$(0，1)$ 上可导，且有 $$f(1)=2\int_0^{1/2} xf(x)dx$$

求证：存在 $\xi\in(0，1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证明： 令 $F(x)=xf(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 $(0,1)$ 上可导

$$F(1)=f(1)=2\int_0^{1/2} xf(x)dx=2\int_0^{1/2} F(x)dx$$

$$\underline{\underline{\text{积分中值定理}}}\ 2F(c)\frac{1}{2}=F(c)\ \Rightarrow F(1)=F(c)$$

则 $F(x)$ 在 $[c，1]$ 上满足罗尔定理的条件

故存在 $\xi\in(c，1)\subset(0，1)$ 使 $F'(\xi)=0$,

$$\text{即}[f(x)+xf'(x)]_{x=\xi}=0$$

$$\Rightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

例5 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续可导，且$f(a)=0$，证明

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\ge\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|dx$$

证明：设 $\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|=M$

$$原不等式\Leftrightarrow\int_a^b|f(x)|dx\le\frac{(b-a)^2}{2}M$$

$$\because\ f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$$

$$\therefore|f(x)|\le|f'(\xi)|(x-a)\le M(x-a)$$

$$\Rightarrow\int_a^b|f(x)|dx\le M\int_a^b(x-a)dx=M\frac{(b-a)^2}{2}$$

内容小结

1. 理解定积分的概念与几何意义

2. 掌握定积分的性质

习题 5-1