5.3　微积分基本定理

5.3.1　　积分上限函数及其导数

5.3.2　　微积分的基本定理

5.3.1 积分上限函数及其导数

1、 问题的提出

在变速直线运动中，已知位置函数$s(t)$与速度函数$v(t)$之间有关系：

$$s'(t)=v(t)$$

物体在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 内经过的路程为 $\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt$

另一方面这段路程可表示为 $s(T_2)-s(T_1)$

$$\therefore \int_{T_1}^{T_2}v(t)dt=s(T_2)-s(T_1).\quad \text{其中}\ s'(t)=v(t).$$

这种积分与原函数的关系在一定条件下具有普遍性.

2、积分上限（变上限）函数及其导数

1. 定义 设$f(x)\in C[a,b]$，x为$[a,b]$中任一点，

考察定积分

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

若x在$[a,b]$中任意变动，则可定义一个新的函数，

记 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,$

称为积分上限函数或变（上）限函数．

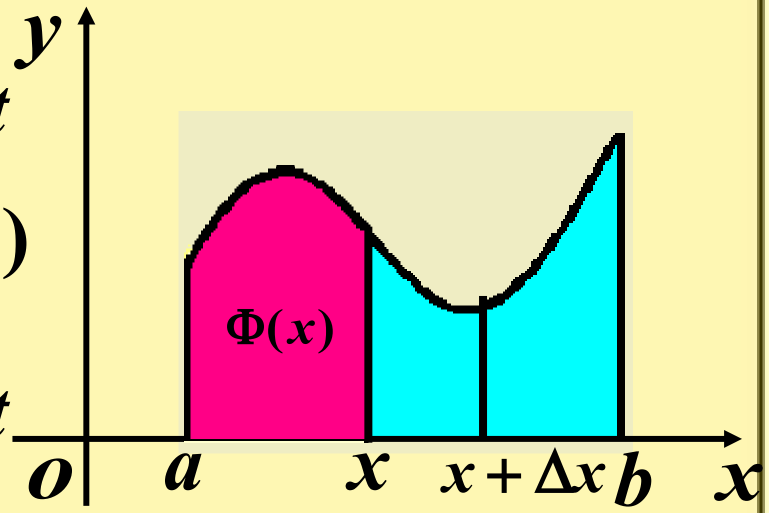
2 积分上限函数的性质

定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续

证明： $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$



$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，

即 $|f(x)|\le M$

$$0 \le |\Delta\Phi| = |\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)|$$

$$= \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \le \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt$$

$$\le \int_x^{x+\Delta x} M dt = M\Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta\Phi = 0$$

所以$f(x)$在$[a,b]$上连续

定理 2 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数是 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad (a\le x\le b)$

证明： $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$

由积分中值定理得

$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x \qquad \xi\in[x,x+\Delta x],$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi), \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$

$$\Delta x\to 0, \xi\to x \qquad \therefore \quad \Phi'(x)=f(x).$$

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的；

（2）给出了积分变限函数的求导公式。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right]$$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例 1 求下列函数的导数

(1) $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}}(x^3)'-\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}(x^2)'$$

$$=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$$

(2) $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}x\cos t^2dt=\frac{d}{dx}(x\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt)$$

$$=\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt-x[\cos(x^2)^2\cdot(x^2)']$$

$$=\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4=-\int_{0}^{x^2}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x}=\frac{1}{2e}.$$

例 3. 确定常数 a, b, c 的值，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}=c\quad(c\neq 0)$$

解：$\because\ x\to 0$ 时，$ax-\sin x\to 0$，$c\neq 0$，$\therefore\ b=0$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{x^2}=c\neq 0$ 故 $a=1$

又由 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，得 $c=\dfrac{1}{2}$

例 4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$，证明

$$F(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数 .

只要证 $F'(x)>0$

证：$$F'(x)=\frac{x f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

$\because (x-t)f(t)\geq 0$ 且连续不恒为 0

$\therefore\ F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增函数.

例 5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$.证明

$2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $[0,1]$ 上只有一个解.

证明 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$,

$\because f(x)<1,\ \therefore F'(x)=2-f(x)>0,$

[illegible] $F(0)=-1<0,$

$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[1-f(t)]dt>0,$

[illegible]

例 6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，

求证 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

证明: 作辅助函数 $F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

则 $F(a)=0$，且对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$F'(x)=xf(x)-\frac{a+x}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f(\xi)$$

$$=\frac{x-a}{2}[f(x)-f(\xi)]\ge 0 \qquad a\le\xi\le x$$

则 $F(x)$ 单调增加，从而 $F(b)\ge F(a)=0$

即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，证毕。

例 7 设 $f(x)$ 连续，证明 $\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x[\int_0^u f(x)dx]du$

’ **证明：令：**

$$F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x[\int_0^u f(x)dx]du$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du-\int_0^x[\int_0^u f(x)dx]du$$

$$=0$$

$$F'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(x)dx$$

$$\therefore F(x)\equiv C,\quad \because F(0)=0,\Rightarrow F(x)=0.$$

5.3.2、微积分基本定理 （牛顿—莱布尼茨公式）

定理 3（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

证明$\because$ $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数,

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \qquad \Phi(b)=\int_a^b f(t)dt$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

[illegible]

$$\therefore F(x)-\Phi(x)=C \qquad x\in[a,b]$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a)$$

牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

★ 微积分基本定理

牛顿——莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) = F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a)$$

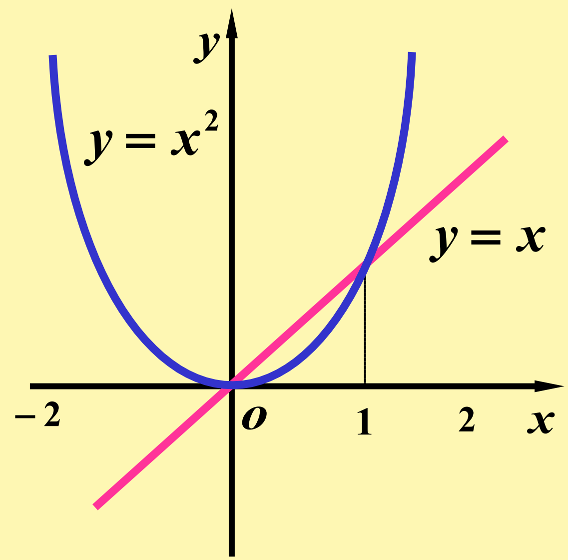
积分中值定理　　　　微分中值定理

通常把这一公式又叫微积分基本定理

例 1 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx.$

解 原式 $=\left[2\sin x-\cos x-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\frac{\pi}{2}.$

例 2 求 $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx.$



解 由图形可知

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -2\le x\le 0 \\ x & 0\le x\le 1 \\ x^2 & 1\le x\le 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{原式}=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^2dx=\frac{11}{2}.$$

例 3 计算$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}dx$

解 原式$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\sqrt{2}[\int_0^{2\pi}|\cos\frac{x}{2}|dx$

$$=\sqrt{2}[\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{x}{2}dx]$$

$$=\sqrt{2}[(2\sin\frac{x}{2})\Big|_0^{\pi}-(2\sin\frac{x}{2})\Big|_{\pi}^{2\pi}]=4\sqrt{2}.$$

例 4 已知$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\geq 0\\ x, & x<0\end{cases}$,

求$\int_0^x f(t)dt$和$\int_{-1}^x f(t)dt$

解 当$x<0$时，$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x tdt=[\frac{t^2}{2}]_0^x=\frac{x^2}{2}$

当$x \ge 0$时，$\int_0^x f(t)dt$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x \ge 0\\ x, & x<0\end{cases},$$

$$=\int_0^x \cos t dt = [\sin t]_0^x = \sin x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt = \begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & x<0\\ \sin x & x \ge 0\end{cases}$$

当$x<0$时，$\int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^x t dt = \frac{1}{2}(x^2-1)$

当$x \ge 0$时，$\int_{-1}^x f(t)dt$

$$=\int_{-1}^0 t dt + \int_0^x \cos t dt = -\frac{1}{2} + \sin x$$

内容小结

1、理解变限积分的函数的概念

变上限积分确定函数的导数

$$[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

利用变限积分函数的导数求含有变限积分函数的极限，研究它的性质，证明与积分 有关的等式、不等式等等。

2、熟练掌握牛顿——莱布尼兹公式

习题 5-2