# 5.4 定积分的换元积分法与分部积分法

5.4.1 定积分的换元积分法

5.4.2 定积分的分部积分法

## 5.4.1、定积分的换元法

### 1、定理 1

设函数 $f(x)\in C[a,b]$，函数 $x=\varphi(t)$ 满足

1) 函数$\varphi(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上有连续的导数$\varphi'(t)$;

2) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，在 $[\alpha,\beta]$上 $\varphi(t)\in[a,b]$

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$

证：所证等式两边被积函数都连续 因此积分都存在

且它们的原函数也存在 设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

则$F[\varphi(t)]$ 是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

说明：

1) 当$\beta < \alpha$，即区间换$[\beta, \alpha]$时，定理 1 仍成立为.

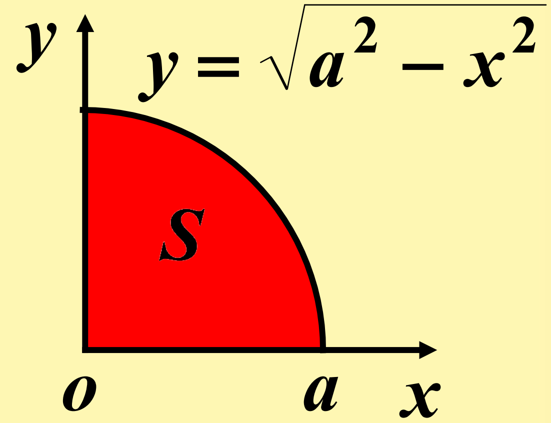
2) 必须注意换元必换限，原函数中的变量不必代回.

3) 公式成立的条件不可少

例 1. 计算$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

解： 令$x = a\sin t$, 则$\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且

当$x = 0$时, $t = 0$; $x = a$时, $t = \frac{\pi}{2}$




∴ 原式 $= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

例 2. 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$ .

解： 令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; $x=4$ 时, $t=3$ .

$$\therefore \text{原式} = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\,t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Bigg|_1^3 = \frac{22}{3}$$

例 3. 计算 $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ .

解： 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 且

当 $x=-3$ 时, $t=-\frac{1}{3}$; $x=-2$ 时, $t=-\frac{1}{2}$ .

$$\text{原式}=\int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-t^2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-t^2}\,\Big|_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

注： 定积分换元技巧与不定积分类似。

**例 4** 设函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1\le x<0 \end{cases}$

计算 $\int_1^4 f(x-2)dx$

**解:** $\int_1^4 f(x-2)dx \overset{\text{令}x-2=t}{=\!=\!=} \int_{-1}^2 f(t)dt$

$$=\int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t}+\int_0^2 te^{-t^2}dt$$

$$=\int_{-1}^0 \frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}+\int_0^2 te^{-t^2}dt$$

$$=[\tan\frac{t}{2}]_{-1}^0-[\frac{1}{2}e^{-t^2}]_0^2=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$$

## 2、利用换元法证明积分等式

例 5 若 $f(x)$ 在 [0， 1] 上连续，证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

证明：(1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t \quad \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t,$

$$x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}, \quad x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\frac{\pi}{2}-t),\cos(\frac{\pi}{2}-t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$$

★ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$

由此可计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

**解:** 利用 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

$$(2)\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

证明：(2) 令$x=\pi-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,

$$x=0 \Rightarrow t=\pi, \quad x=\pi \Rightarrow t=0,$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

用此结论可计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

## 3、在对称区间上定积分的特性

**定理** 当$f(x)$在$[-a,a]$上连续，且有

①$f(x)$为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

②$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

**证**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx,$$

在$\int_{-a}^{0} f(x)dx$中令$x=-t$,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt,$$

$f(x)$为偶函数，则$f(-t)=f(t)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(t)dt;$$

[illegible] $f(-t)=-f(t)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0.$$

**例 6** 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

**解** 原式 $=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

偶函数　　　　奇函数

$$=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_{0}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=4-\pi.$$

1/4 单位圆的面积

## 4、周期性在定积分计算中的应用

例 7 设 $f(x)$ 是连续的以 $T(>0)$ 为周期的周期函数，证明：对任何实数 $a$，有 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

证明：

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$$

而 $$\int_T^{a+T} f(x)dx \underline{\underline{x = T + u}} \int_0^a f(u+T)du$$

$$= \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx$$

所以有 $$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

注： (1) 定理表明：以 $T$ 为周期的连续函数 $f(x)$ 在任意的区间长度为 $T$ 的区间上的定积分都相等。

即：

$$\int_a^{a+T} f(x)dx \text{的值与} a \text{无关。}$$

（2）利用利用此结论可简化计算。

例：计算 $\int_0^{2n\pi} \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx$

$$= \int_0^{2n\pi} |\sin x|\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx$$

$$= 2n\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx = 2n \cdot 2 = 4n$$

## 5.4.2 定积分的分部积分

**定理 2.** 设 $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$，则

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

**证明：** $\because\ [u(x)\,v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

两端在 $[a,b]$ 上积分

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$$\therefore \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

**例 1** 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$

**解** $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

**例 2** 计算 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$

**解** 令 $\sqrt{x} = t$ 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 e^t \cdot 2tdt = 2\int_0^2 tde^t$$

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^2 e^t \cdot 2tdt = 2\int_0^2 tde^t$$

$$= [2te^t]_0^2 - 2\int_0^2 e^t dt \quad = 4e^2 - 2[e^t]_0^2$$

$$= 2e^2 + 2$$

**例 3** 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x}$

**解** 原积分 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2} d(\tan x)$

$$= \frac{1}{2}[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}[\ln\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

**例 4** 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx$

**解** 原积分 $= -\int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2+x}$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}dx \qquad \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \left[\ln(1+x) - \ln(2+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

**例 5** 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

**解** $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$$

$$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2 dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

$$f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}dt=0,$$

$$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x}.$$

**例 6.** 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， 且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$。

**解:**

$$\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,f'(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[xf'(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \underline{f'(2x)\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}\left[f(2x)\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\left[f(2) - f(0)\right] = 2$$

**例 7** 证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$

$$=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n\text{ 为大于 1 的正奇数}\end{cases}$$

**证明** $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x$

$$=\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

由此得递推公式：$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,$$

$$(m=1,2,\cdots)$$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1,$$

于是 $$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

例 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t\, dt = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\, dt = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

# 内容小结

1、 熟悉掌握定积分的换元与分部积分法

2、 熟悉如下的一些结论：（均假设 $f(x)$ 连续）

(1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的函数，则：

对任何实数 $a$ ，有 $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

（3） $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为大于 1 的正奇数}\end{cases}$$

习题 5-3