本章所讲的定积分有两个基本条件（前提）

积分区间——有限闭区间 $[a，\ b]$，

被积函数——$f(x)$ 在 $[a，\ b]$ 上有界。

在实际问题中会遇到积分区间为无穷区间，或者被积函数为无界函数的积分，这就不是我们前面所讲的定积分了。这样的积分问题可看作对定积分做的两种推广，从而形成广义 (反常) 积分的概念。

5.5　广义（反常）积分

5.5.1　无穷区间上的广义积分

5.5.2　无界函数的广义积分

6.4.1、无穷区间上的广义(反常)积分

1、定义 1. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，取 $b>a$，若

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限广义积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

这时称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛；

如果上述极限不存在，就称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散.

类似地，若$f(x)\in C(-\infty,b]$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

为$f(x)$在无穷区间$(-\infty,b]$上的广义积分.

若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

(c 为任意取定的常数)

为$f(x)$在无穷区间$(-\infty,+\infty)$上的广义积分.

上式中只要有一个极限不存在，就称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散 .

2、计算方法

(1). 若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,

记 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$, $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$,则:

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

(2). 分部积分公式也适用于无穷限的广义积分

$$\int_a^{+\infty}udv=uv\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}vdu$$

(3). 同样有换元公式 令$x=\varphi(t),\varphi(\alpha)=a,\lim\limits_{t\to\beta-}\varphi(\mathrm{t})=+\infty$,

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\varphi'(t)dt.$$

例 1 计算广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x$$

$$=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$$

例 2 计算广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$.

解 $$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{\pi}{2}=1$$

例 3 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$ ($p > 0$,是常数)

解: $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{p} de^{-pt}$

$$= [-\frac{t}{p}e^{-pt}]_0^{+\infty} - \frac{1}{p^2}[e^{-pt}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$$

注: 式中的极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-pt}$

是未定式，可用洛必达法则确定。

$$\lim_{t\to+\infty} te^{-pt} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{pt}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{pe^{pt}} = 0$$

例 4 证明广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

证明 (1) $p=1, \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^{+\infty}=+\infty,$

(2) $p\ne 1, \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$

因此当$p>1$时广义积分收敛，其值为$\frac{1}{p-1}$；

当$p\le 1$时广义积分发散.

6.4.2、无界函数的广义积分

定义 2. 设$f(x)\in C(a,b]$，而在点 a 的右邻域内无界

对任意$A>a$，若极限$\lim\limits_{A\to a^+}\int_A^b f(x)dx$**存在，则称此极限为**

$f(x)$**在区间**$(a,b]$**上的广义积分，记作**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to a^+}\int_A^b f(x)dx$$

这时也称广义积分收敛；

当极限不存在时，称广义积分发散.

类似地，若$f(x)\in C[a,b)$，而在 b 的左邻域内无界

则定义 $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{B\to b^-}\int_a^B f(x)\,dx$

为$f(x)$**在区间**$[a,b)$**上的广义积分.**

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续，

而在点 c 邻域内无界 则定义的

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{A\to c^-}\int_a^A f(x)dx + \lim_{B\to c^+}\int_B^b f(x)\mathrm{d}x$$

上面只要有一个极限不存在，就称广义积分

$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

注 (1) 定义中附近无界的点称为**瑕点**，以上积分称为**瑕积分**.

注 (2) 若$F(x)$是 $f(x)$的原函数，引入记号

$$F(b^-)=\lim_{x\to b^-}F(x);\quad F(a^+)=\lim_{x\to a^+}F(x)$$

$$F(c^+)=\lim_{x\to c^+}F(x)\quad F(c^-)=\lim_{x\to c^-}F(x);$$

则有类似牛顿－莱布尼兹公式的计算表达式 ：

b为$f(x)$的瑕点，则$\int_a^b f(x)dx=F(b^-)-F(a)$

a为$f(x)$的瑕点，则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a^+)$

a，b为$f(x)$的瑕点，则$\int_a^b f(x)dx=F(b^-)-F(a^+)$

$c(a\le c\le b)$为$f(x)$的瑕点，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(c^+)+F(c^-)-F(a)$$

例 1 证明广义积分$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$当$q<1$时收敛，当$q\geq 1$时发散.

证明 (1) $q=1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx=\int_0^1 \frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_{0^+}^1=+\infty$,

(2) $q\neq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx=\left[\frac{x^{1-q}}{1-q}\right]_{0^+}^1=\begin{cases} +\infty, & q>1 \\ \frac{1}{1-q}, & q<1 \end{cases}$

因此当$q<1$时广义积分收敛，其值为$\frac{1}{1-q}$；当$q\geq 1$时广义积分发散.

例 2. 计算广义积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解：显然瑕点为 a，所以

$$原式 = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例 3. 讨论广义积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 的收敛性 .

解：$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1} = \infty$

所以反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例 4　计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

解： $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$， $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

原积分属两类广义积分

$$I=\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\underline{\underline{\text{令}x=\sec t}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}dt$$

$$=\int_0^{\pi/3}dt+\int_{\pi/3}^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$$

当$x=2, t=\frac{\pi}{3}$，当$x\to1^+, t\to0^+$，当$x\to+\infty, t\to\frac{\pi}{2}^-$

注： 1. 换元法可将广义积分化为新的广义积分或定积分 .

2. 若瑕点或∞在端点，则不必把积分分成两部分 .

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\;\underline{\underline{令x=\sec t}}\;=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$$

内容小结

1 、熟练掌握两类广义积分的定义和计算

习题 5.5 总习题