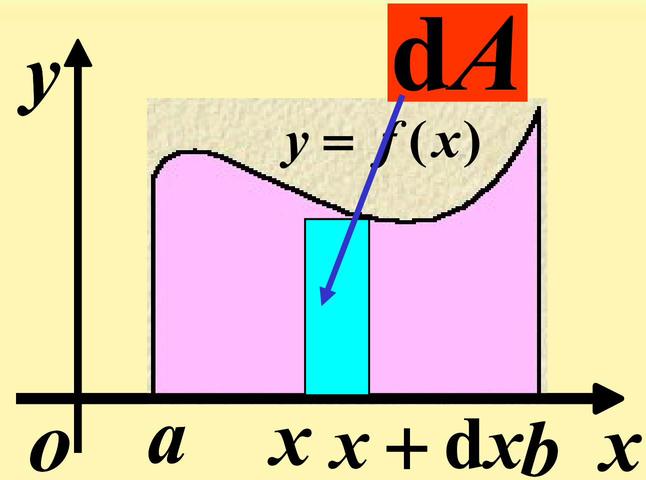
5.6　定积分的几何应用

5.6.1 、微元法基本思想



1. 回顾曲边梯形的面积问题

具体步骤　　“四步曲”

“大化小，常代变，近似和，取极限”

面积 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

在实际应用时，局部量的近似值

$\Delta A \approx f(x)dx \underset{=\!=}{\text{记作}} \mathrm{d}A$　称 dA 为面积元素(微元）

然后把 $\mathrm{d}A$ 在 $[a, b]$ 上作定积分

，则得 $A=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

2 、什么问题可以用定积分解决 ？

1) 所求量 U 是与区间 $[a , b]$ 上的某分布 $f(x)$ 有关的个整体量 ；

2) U 对区间 $[a , b]$ 具有可加性即可通过

，“ 大化小，常代变，近似和，取极限”

表示为 $U = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

定积分定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

3 、如何应用定积分解决问题 ？

(1) 根据具体问题，选取一个变量 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a, b]$ ；

(2) 在 $[a, b]$ 上，任取一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ ；利用“以大化小，以常代变” 求出局部量的近似值 — 微元表达式 $\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$

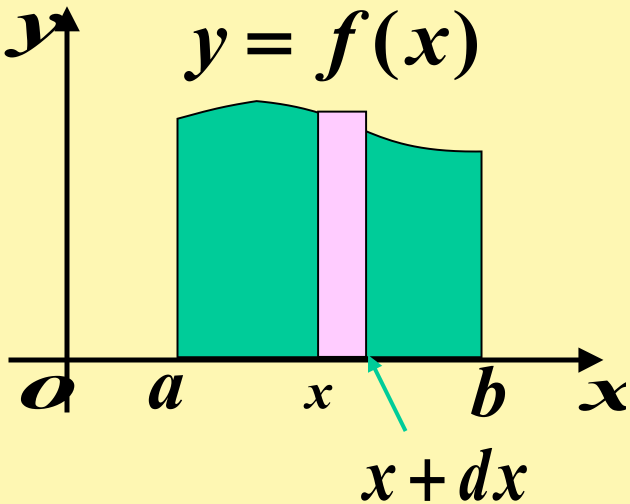
(3) 利用“ 积零为整 ，无限累加 ” 求出整体量的精确值— 积分表达式 $U = \int_a^b \mathrm{d}U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

这种分析方法称为元素法 (或微元法)

应用方向： 平面图形的面积；体积；平面曲线的弧长；功；侧压力；引力等。

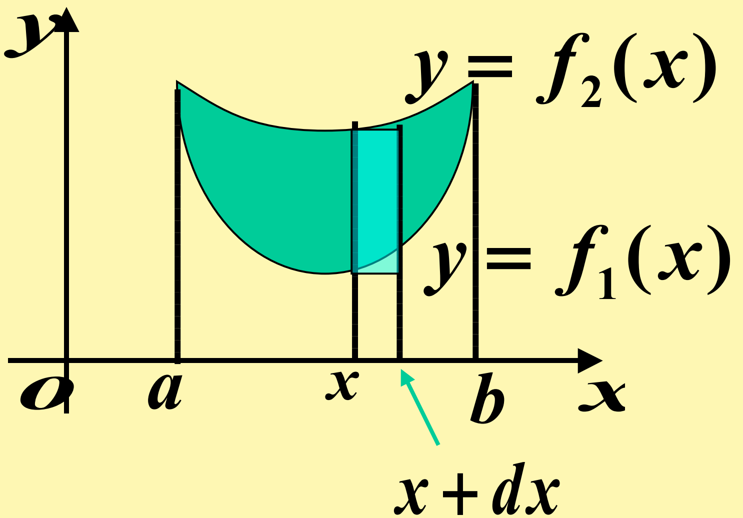
5.6.2　平面图形的面积

(1)、直角坐标情形



曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b f(x)dx$$



曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

例 1. 计算两条抛物线 $y^2 = x,\ y = x^2$ 在第一象限所围图形的面积 .

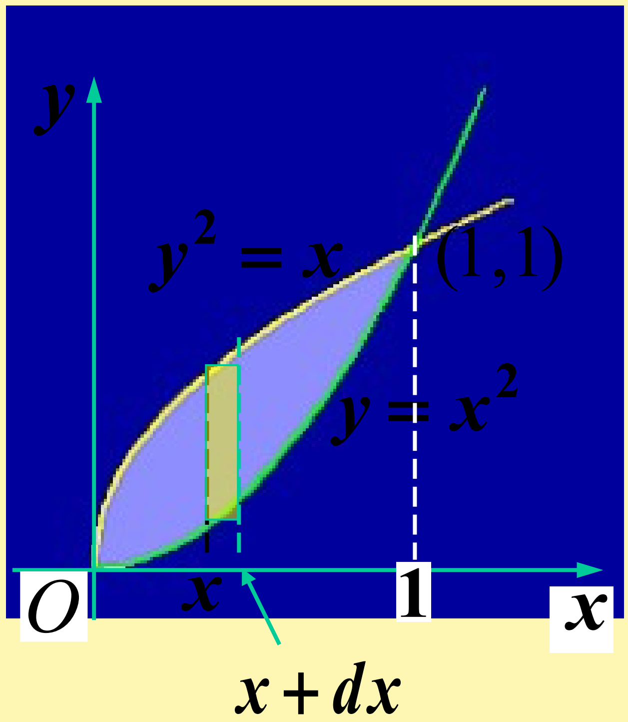
解： 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$ 得交点 $(0,0)$, $(1,1)$

选取 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

$$\therefore \quad A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

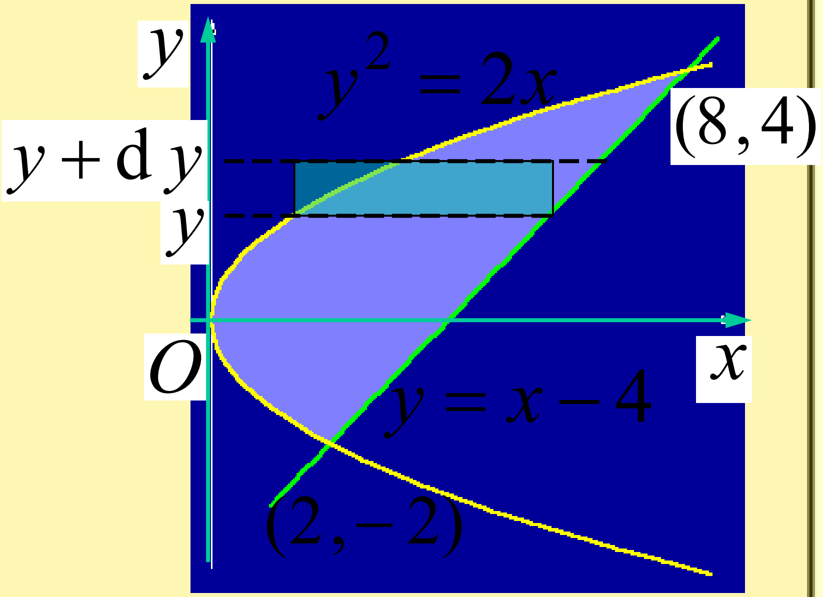
$$= \frac{1}{3}$$



例 2. 计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围图形的面积 .

解： 由 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得交点

$(2, -2), (8, 4)$



选取 y 作积分变量，$y \in [-2, 4]$

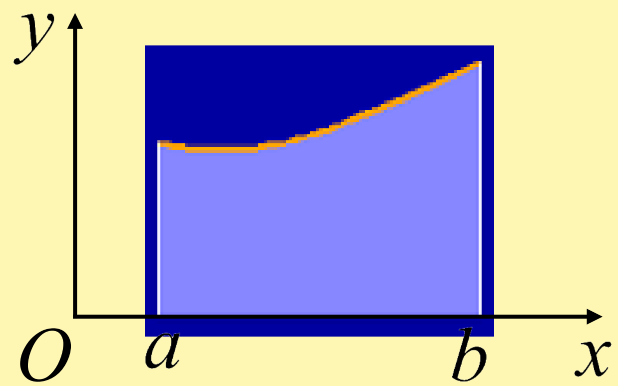
$$\therefore \quad A = \int_{-2}^{4} (y + 4 - \frac{1}{2} y^2) dy$$

$$= [\frac{1}{2} y^2 + 4y - \frac{1}{6} y^3]_{-2}^{4} = 18$$

2、 如果曲边梯形的曲边为参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b y\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

其中 $a=\varphi(t_1),\ b=\varphi(t_2)$

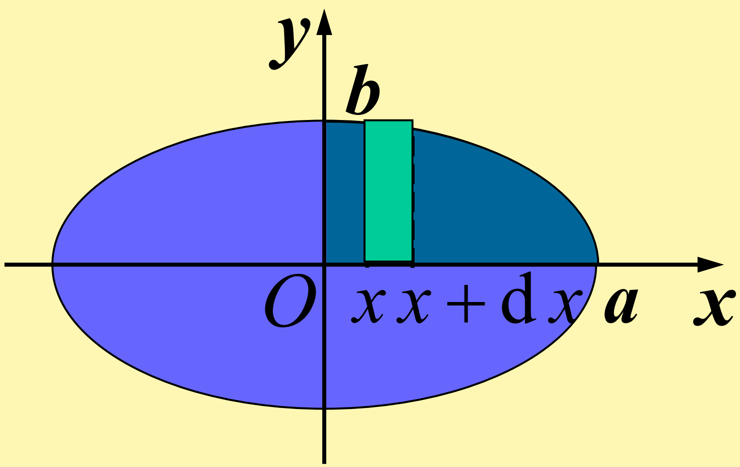


例 3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

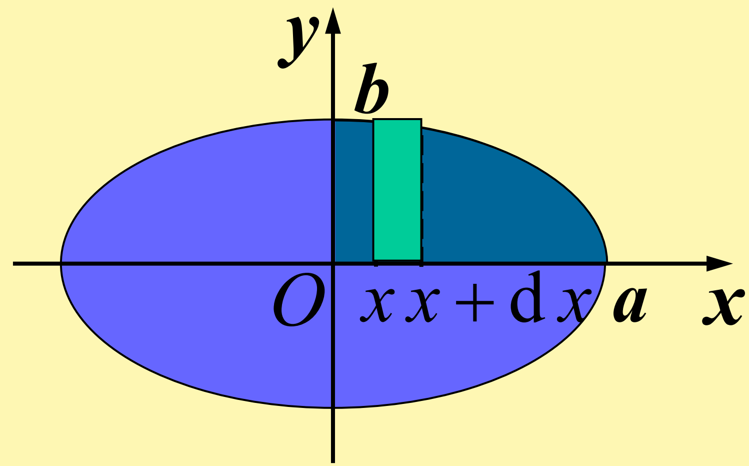
解：利用对称性 , 有

$$dA=y\,dx$$

$$A=4\int_0^a y\,dx$$



$$A = 4\int_0^a y dx$$



利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t) dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$$

$$= 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

当 $a = b$ 时得圆面积公式

例 4. 求由摆线 $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)\ (a>0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积

解：$A = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$

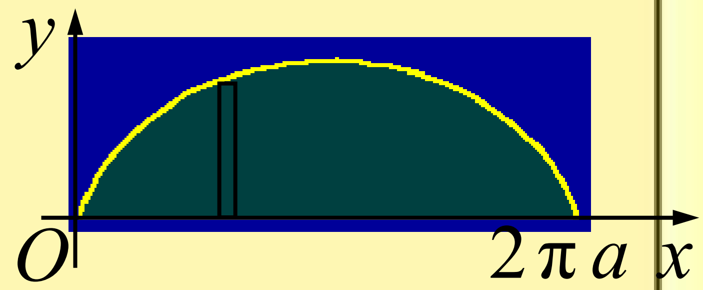
$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,du \qquad (令\ u=\frac{t}{2})$$

$$= 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,du$$

$$= 16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$$



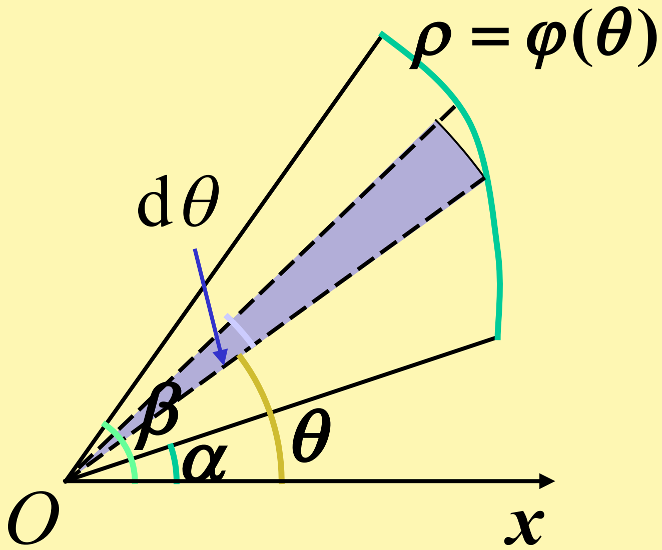
3、极坐标情形

设$\varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta]$, $\varphi(\theta)\geq 0$,求由曲线 $\rho=\varphi(\theta)$ 及**射线** $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$

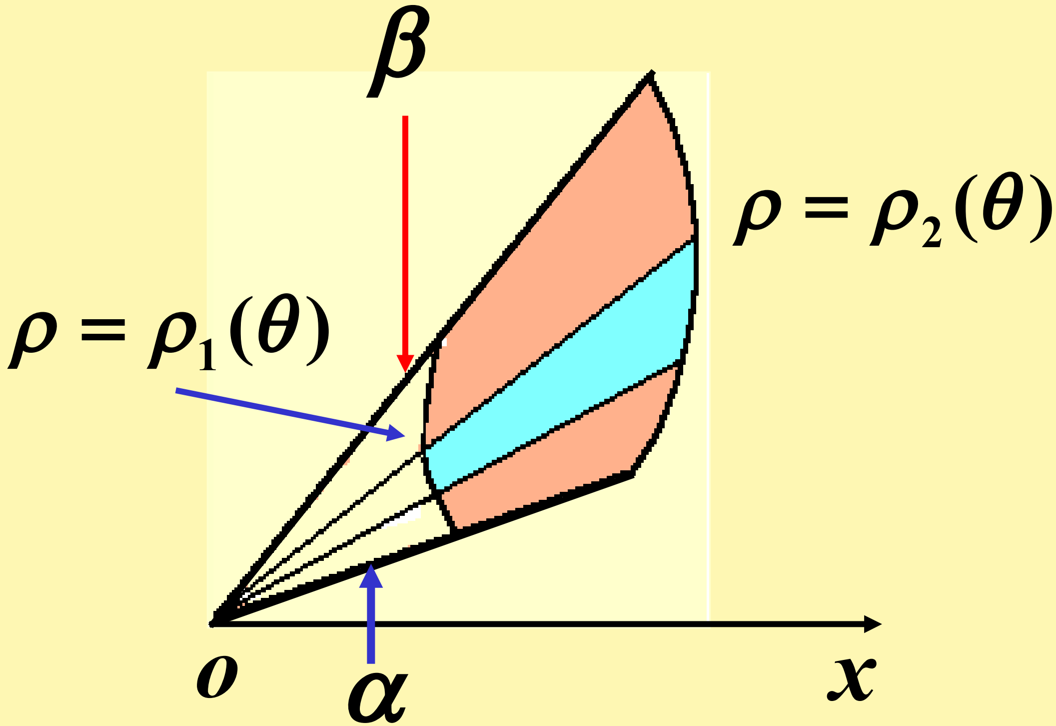
则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$dA=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta$$



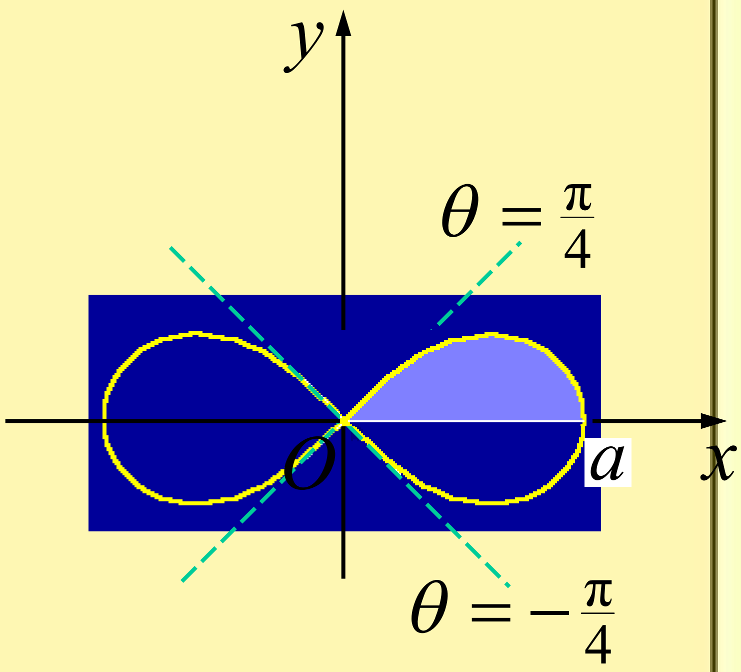
所求曲边扇形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)d\theta$$



$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\rho_2^2-\rho_1^2]\,\mathrm{d}\theta$$

例 5. 求双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta \ (a>0)$ 所围图形的面积 .



解: 双扭线的直角坐标方程为

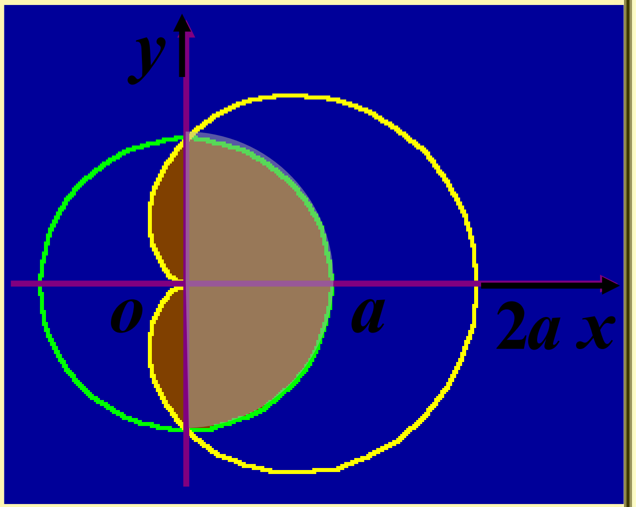
$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

由对称性知总面积 =4 倍第一象限部分面积

$$A = 4A_1$$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta d\theta = a^2 .$$

例 6. 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 与圆 $\rho = a$ 所围图形的面积。



解： 利用对称性 所求面积

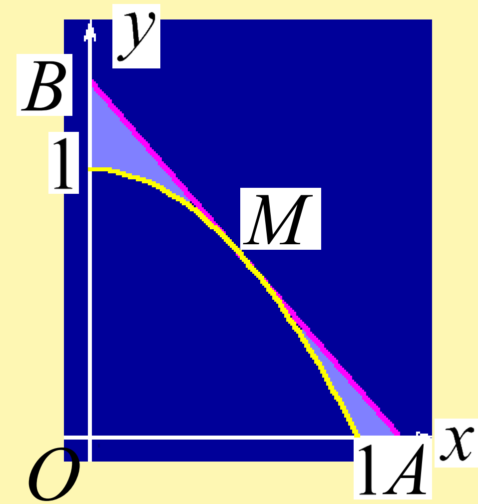
，$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\,\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2 (1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2$$

例 7. 求抛物线 $y=1-x^2$ 在 (0,1) 内的一条切线, 使它与两坐标轴和抛物线所围图形的面积最小 .

解：设抛物线上切点为 $M(x,1-x^2)$



则该点处的切线方程为

$$Y-(1-x^2)=-2x(X-x)$$

它与 x,y 轴的交点分别为

$$A\left(\frac{x^2+1}{2x},0\right),\quad B(0,\ x^2+1)$$

所指面积

$$S(x)=\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^2}{2x}-\int_0^1(1-x^2)\,dx=\frac{(x^2+1)^2}{4x}-\frac{2}{3}$$

$$S'(x) = \frac{1}{4x^2}(x^2+1)\cdot(3x^2-1)$$

令 $S'(x)=0$,得 $[\,0\,,1]$ 上的唯一驻点 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad S'(x) < 0$$

$$x > \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad S'(x) > 0$$

因此 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 是 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上的唯一极小值点,

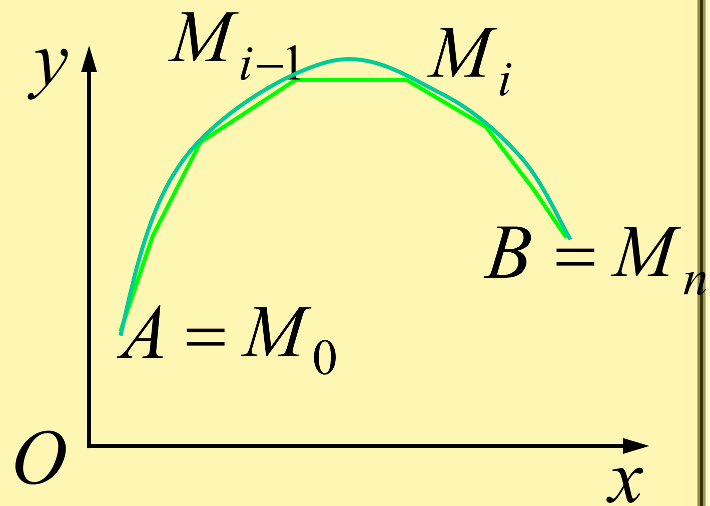
故为最小值点,因而所求切线为

$$Y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}X + \frac{4}{3}$$

5.6.3 、平面曲线的弧长

定义：若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda\to 0$ 时，折线的长度趋向于一个确定的极限，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$$



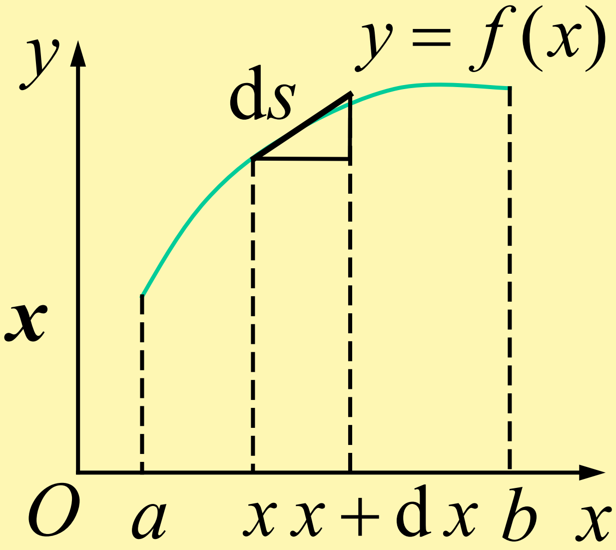
并称此曲线弧为可求长的．

定理：任意光滑曲线弧都是可求长的．

（证明略）

(1). 曲线弧由直角坐标方程给出

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$



弧长元素 (弧微分)

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

因此所求弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

注意：求弧长时积分上下限必须上大下小

注：若曲线方程为 $x = g(y), (c \le y \le d)$.**则**

$$ds = \sqrt{1 + x'^2} dy \qquad s = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2} dy.$$

(2). 曲线弧由参数方程给出

：
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长元素 (弧微分)

：
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)](dt)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

弧长 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$

(3). 曲线弧由极坐标方程给出：

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

$$\because \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \ (\alpha \le \theta \le \beta) \end{cases}$$

$$\therefore ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}d\theta,$$

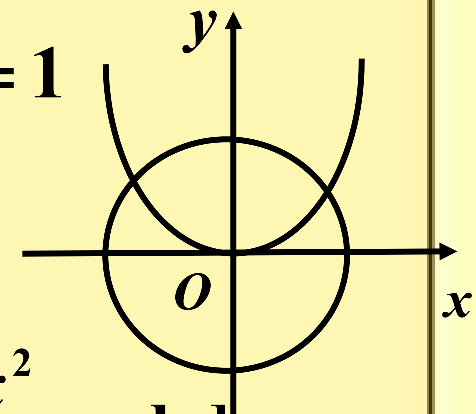
$$= \sqrt{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)^2}d\theta,$$

$$= \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta,$$

弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta.$

例 1. 求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长.

解: 由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ y_1=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=-\sqrt{2} \\ y_2=1 \end{cases}$



由对称性 $s=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

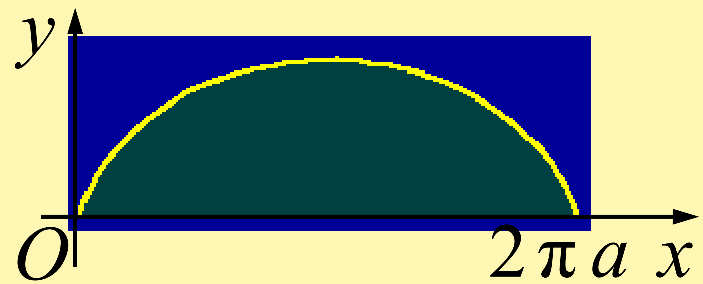
$$=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=2\left[x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\left[x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx+\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right]$$

$$=\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^{\sqrt{2}}=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

例 2 计算摆线$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$$(a>0)$的一拱$(0 \le t \le 2\pi)$

的弧长



解: $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

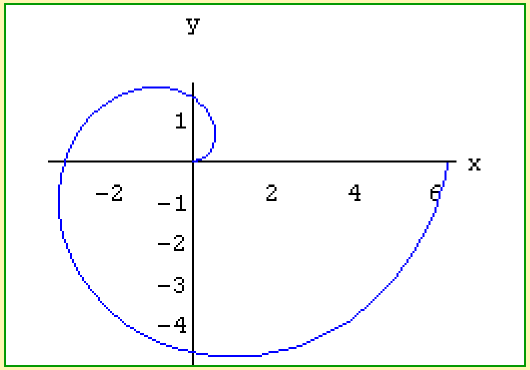
$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\, dt \quad = 2a\sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\, d\, t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 8a$$

例 3. 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta \quad (a > 0)$ 相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 一段的弧长



解. $\because \quad \rho' = a,$

$$\therefore \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\, d\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta$$

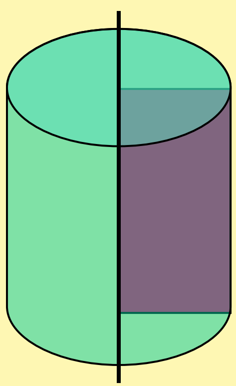
$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

注 $\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}] + C$

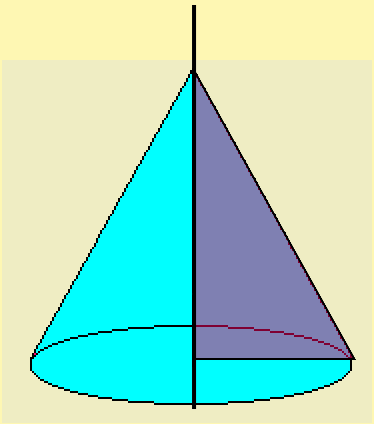
5.6.4 体积

1 旋转体的体积

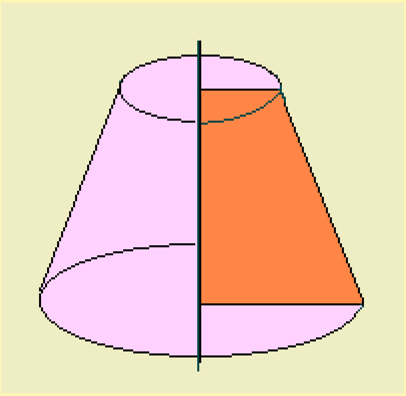
旋转体就是由一个平面图形饶这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做旋转轴.



圆柱



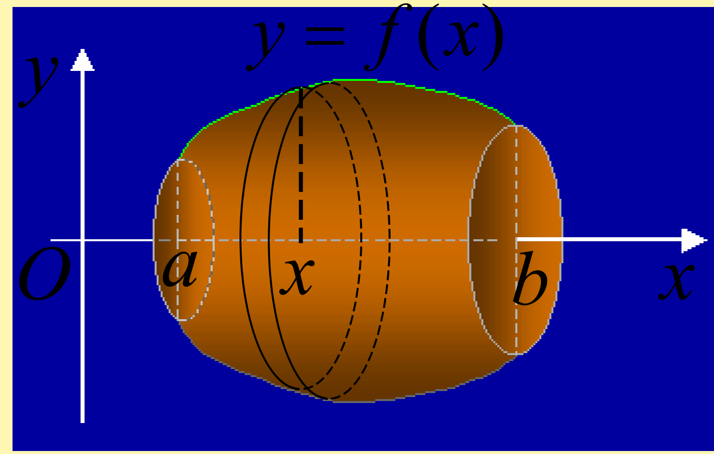
圆锥



圆台

若旋转体由连续曲线$y = f(x)$，直线$x = a, x = b$及x轴所围的曲边梯形绕x轴旋转而成，求此旋转体的体积.

取积分变量为$x \in [a,b]$



取以dx为底的窄边梯形绕x轴旋转而成的薄片的体积为体积元素，

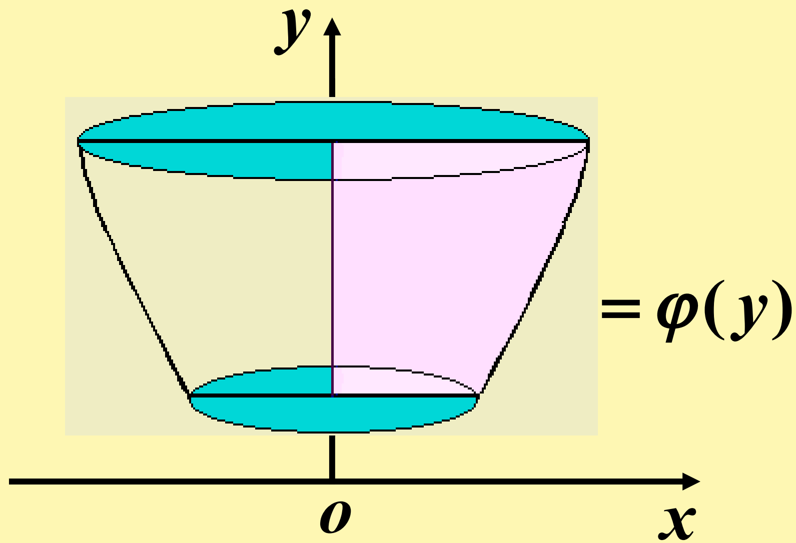
$$dV = \pi[f(x)]^2 dx$$

旋转体的体积为
$$\boxed{V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx}$$

注：**由曲线$y = f(x), y = g(x) (0 < g(x) < f(x))$及$x = a, x = b$所围图形绕$x$轴旋转所得的立体的体积**

$$V = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

$$V=\int_c^d \pi\,[\varphi(y)]^2\,dy$$

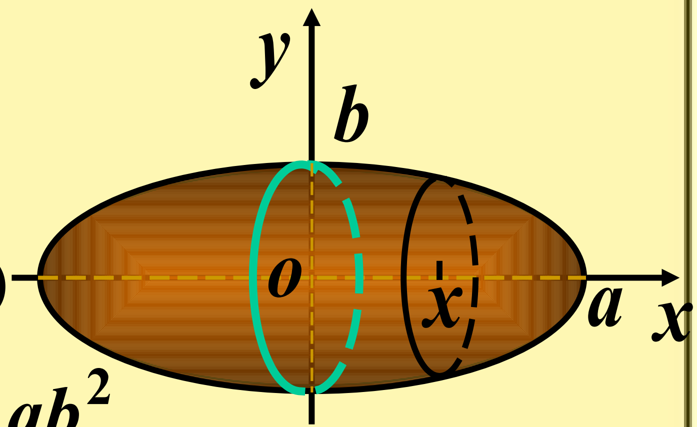


注：由曲线$x=f(y), x=g(y)(0<g(y)<f(y))$及$y=a$, $y=b$所围图形绕y轴旋转所得的立体的体 积

$$V=\pi\int_a^b[f^2(y)-g^2(y)]dy$$

例 1. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而生成立体的体积.

解: 绕 x 轴旋转时,



$$V_x = 2\int_0^a \pi\, y^2\, \mathrm{d}x \quad (\text{利用对称性})$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

解法二: 利用椭圆的参数方程,

$$V_x = 2\int_0^a \pi\, y^2\, \mathrm{d}x \qquad \text{椭圆参数方程} \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

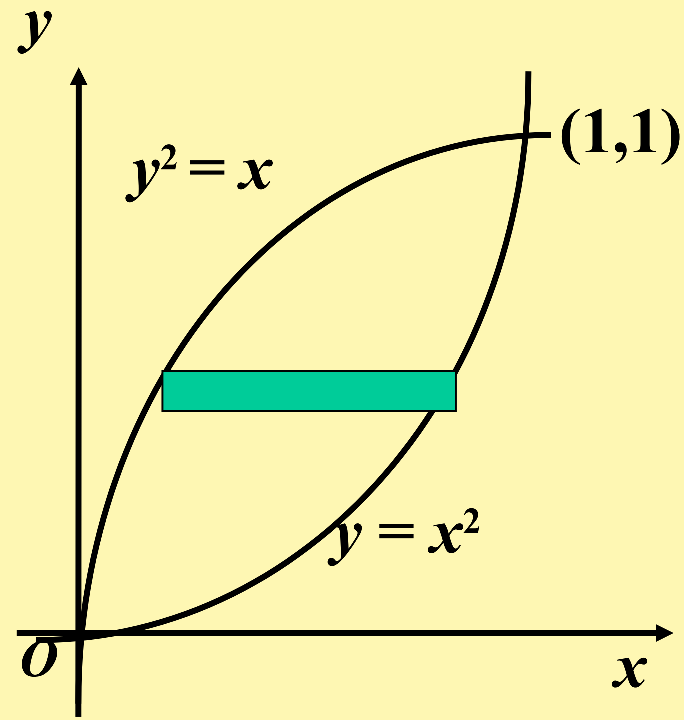
$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2 \sin^3 t\,\mathrm{d}t = 2\pi ab^2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别当 $b = a$ 时, 就得半径为 a 的球体的体积 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

例 2. 求由 $y=x^2$ 及 $x=y^2$ 所围图形绕 y 轴旋转一周所生成立体的体积.

解: $V=\int_0^1 \pi(y-y^4)dy$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3}{10}\pi$$



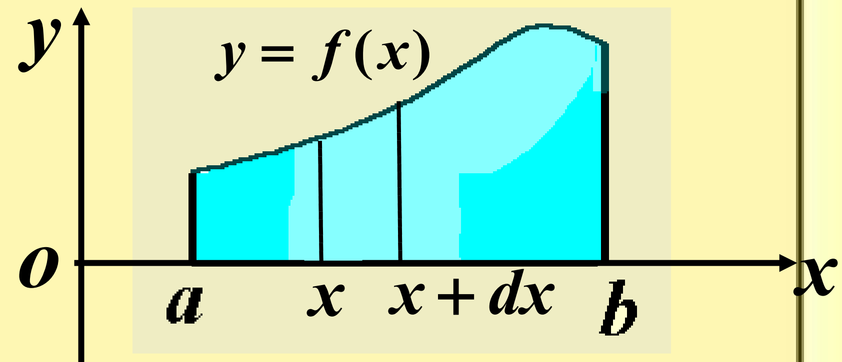
注：由曲线 $x=f(y), x=g(y)(0<g(y)<f(y))$ **及** $y=a$, $y=b$ **所围图形绕** y **轴旋转所得的立体的体积**

$$V=\pi\int_a^b[f^2(y)-g^2(y)]dy$$

补充 由$y=f(x)$，直线$x=a, x=b$及 x 轴所围的曲边梯形绕y轴旋转而成的旋转体的 体积为：

$$V_y = 2\pi\int_a^b x f(x)dx$$

（此方法称为柱壳法）



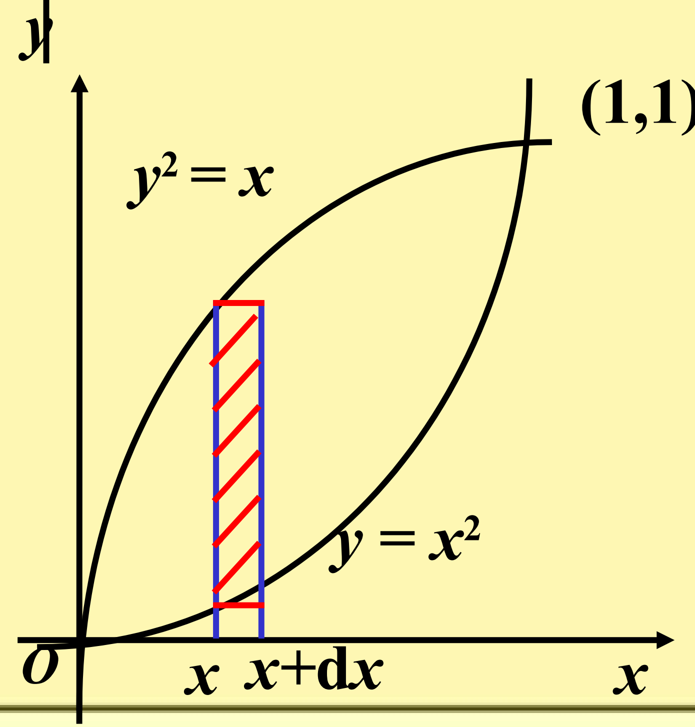
解 法 二 （柱壳法）：

$$dV = 2\pi x[\sqrt{x} - x^2]dx$$

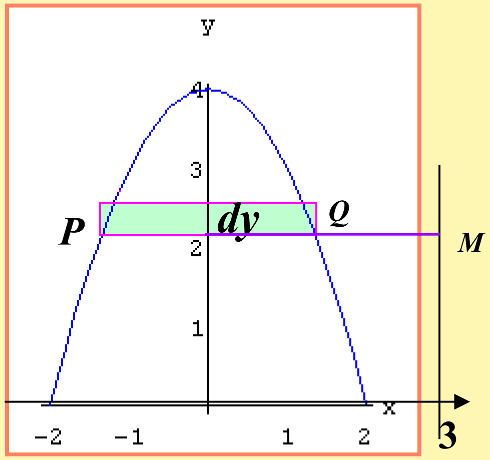
$$V = \int_0^1 2\pi x(\sqrt{x} - x^2)dx$$

$$= 2\pi[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^4]_0^1$$

$$= 2\pi(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}) = \frac{3}{10}\pi$$



例 3 求由曲线$y=4-x^2$及$y=0$所围成的图形绕直线$x=3$旋转构成旋转体的体积.



解 取积分变量为y，$y\in[0,4]$

体积元素为

$$dV=[\pi\overline{PM}^2-\pi\overline{QM}^2]dy$$

$$=[\pi(3+\sqrt{4-y})^2-\pi(3-\sqrt{4-y})^2]dy$$

$$=12\pi\sqrt{4-y}dy,\quad \therefore V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}dy=64\pi.$$

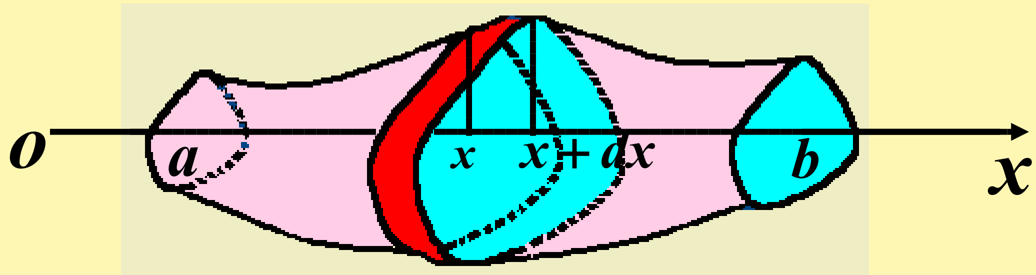
取x**为积分变量**，$x\in[-2,2]$

$$\therefore V=2\pi\int_{-2}^{2}(3-x)(4-x^2)dx=6\pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=64\pi.$$

2、平行截面面积为已知的立体的体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算．

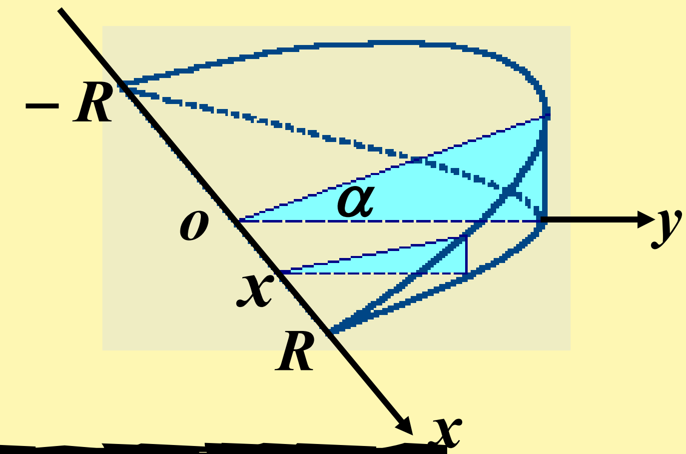
$A(x)$表示过点x且垂直于x轴的截面面积，



$dV = A(x)dx,$ 立体体积 $V = \int_a^b A(x)dx.$

例 4　一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解　取坐标系如图



底圆方程为

$$x^2 + y^2 = R^2$$

[redacted]

截面面积　$A(x) = \dfrac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha,$

立体体积　$V = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\tan\alpha dx = \dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha.$

习题 5-6　总习题