5.7　定积分的物理应用

5.7.1　变力沿直线做功

5.7.2　液体对薄板的侧压力

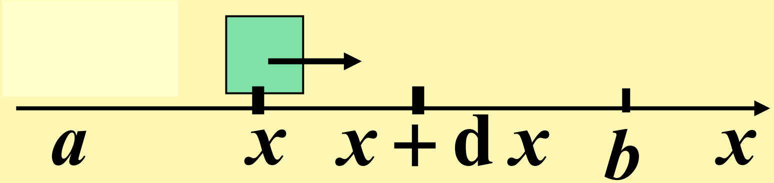
5.7.3　引力（自学）

5.7.1、变力沿直线作功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x = a$ 移动到 $x = b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功。

在$[a,b]$上任取子区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，在其上所作的功元素为

$$\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x$$



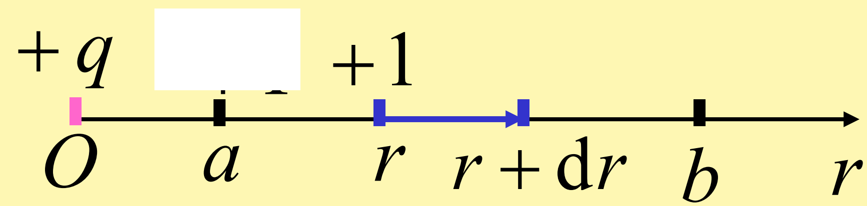
因此变力 $F(x)$ 在区间$[a,b]$上所作的功为

$$W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

例 1在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下，一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处 $(a<b)$，求电场力所作的功．

解：当单位正电荷距离原点 r 时，由库仑定律电场力为

$$F = k\frac{q}{r^2}$$



则功的元素为 $\mathrm{d}W = \dfrac{kq}{r^2}\mathrm{d}r$

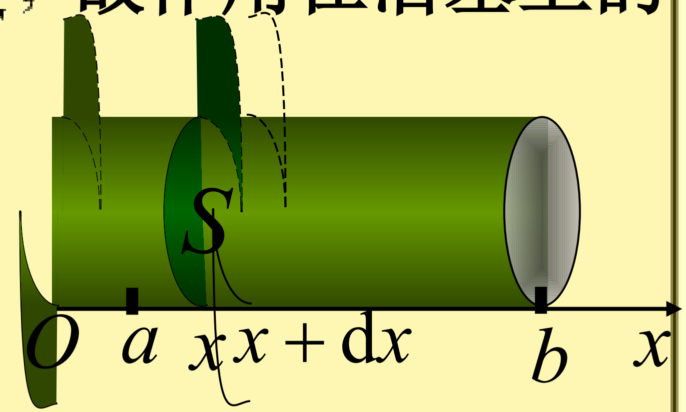
所求功为 $$W = \int_a^b \frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r = kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

说明：电场在 $r=a$ 处的电势为 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{kq}{a}$

例 2.在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体，由于气体的膨胀，把容器中的一个面积为 S 的活塞从点 a 处移动到点 b 处 (如图)，求移动过程中气体压力所作的功.

解：建立坐标系如图. 由波义耳—马略特定律知压强 p 与体积 V 成反比，即 $p=\dfrac{k}{V}=\dfrac{k}{xS}$，故作用在活塞上的力为

$$F=p\cdot S=\frac{k}{x}$$



功元素为

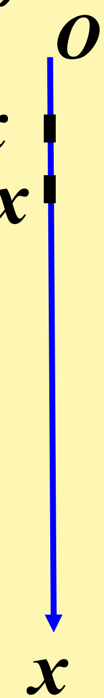
$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}x=\frac{k}{x}\mathrm{d}x$$

所求功为

$$W=\int_a^b\frac{k}{x}\mathrm{d}x=k\big[\ln x\big]_a^b=k\ln\frac{b}{a}$$

例 3. 用铁锤把钉子钉入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比，铁锤在第一次锤击时将铁钉击入 1cm，若每次锤击所作的功相等，问第 n 次锤击时又将铁钉击入多少？

解：建立坐标系如图．



钉子钉入木板的深度 $x$cm 时所受阻力为 $F(x) = kx$

第一次锤击时所作的功为 $W_1 = \int_0^1 kx\mathrm{d}x = \dfrac{k}{2}$,

设 n 次击入的总深度为 h 厘米

n 次锤击所作的总功为 $W_n = \int_0^h kx\mathrm{d}x = \dfrac{kh^2}{2}$,

每次锤击所作的功相等 $W_n = nW_1 \Rightarrow \dfrac{kh^2}{2} = n \cdot \dfrac{k}{2}$,

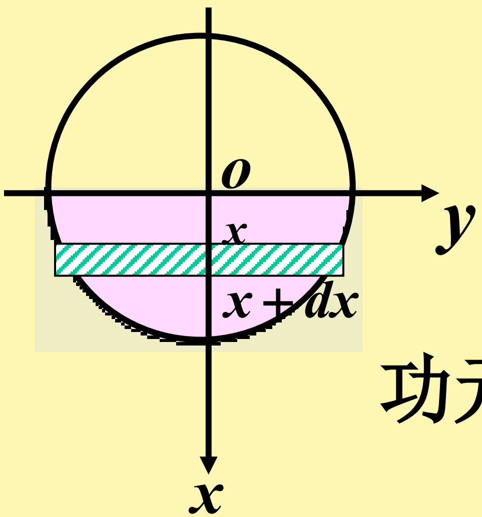
n 次击入的总深度为 $h = \sqrt{n}$,

第 n 次击入的深度为 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$

例4　**有一半径为**4米开口向上的半球型容**器，盛满了水，试问要将容器里的水全**部吸出需做多少功？

（$\rho g = 9.8KN/m^3$,**结果保留**π)

解　建立坐标系如图



$$dV = \pi y^2 dx = \pi(4^2 - x^2)dx$$

这一薄层水的重力为

$$9.8\pi \cdot (4^2 - x^2)dx$$

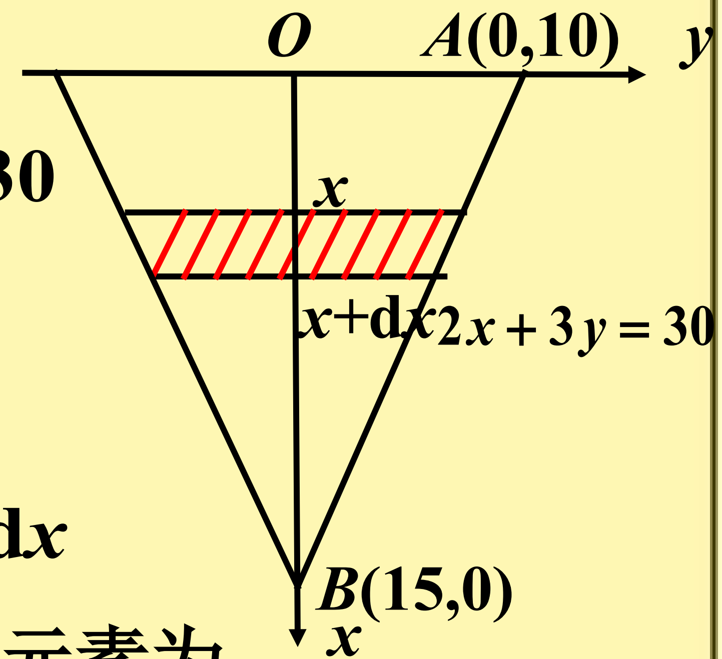
功元素为　$dw = 9.8\pi \cdot x(4^2 - x^2)dx$

$$w = \int_0^4 9.8\pi \cdot x(4^2 - x^2)dx$$

$$= 627.2\pi \cdot (KJ)$$

例 5. 设一锥形贮水池，深 15 米，口径 20 米，盛满水，今将水吸尽，问要作多少功？

解： 建立坐标系如图所示。



则直线 AB 的方程为 $2x+3y=30$

任取一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，

这薄层水的体积元素为

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\left(10-\frac{2x}{3}\right)^2\mathrm{d}x$$

把这一部分水吸出所需做的功元素为

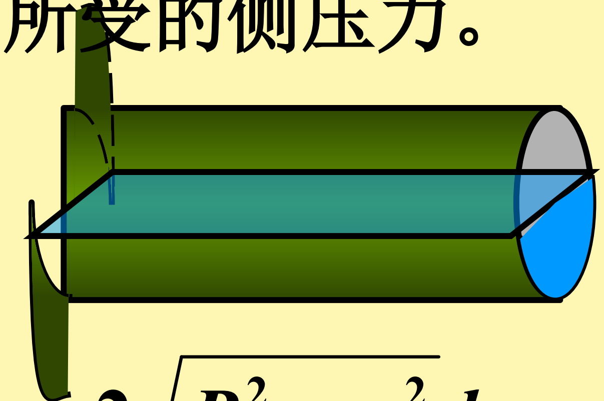
$$\mathrm{d}W=\rho g x\,\mathrm{d}V=\rho g\pi x\left(10-\frac{2x}{3}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$W=\rho g\pi\int_0^{15}x\left(10-\frac{2x}{3}\right)^2\mathrm{d}x=1875\pi\rho g\,(kJ)$$

5.7.2、 侧压力

由物理学知道，在水深为h处的压强为$p=\rho gh$，这里ρ是水的密度．如果有一面积为A的平板水平地放置在水深为h处，那么，平板一侧所受的水压力为$P=p\cdot A$.

例 6. 一水平横放的半径为 R 的圆桶，内盛半桶密度为 ρ 的液体，求桶的一个端面所受的侧压力。

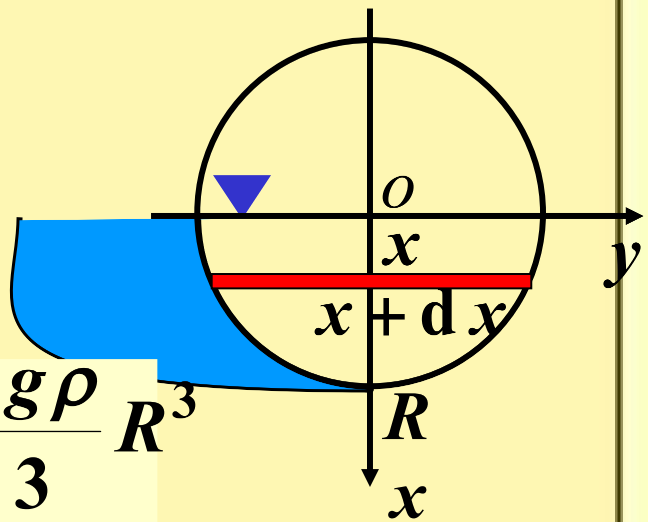


解：建立坐标系如图，所论半圆的方程为 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\ (0\le x\le R)$

窄条形所受的面积为 $dS=2ydx=2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

窄条形所受的侧压力元素

$$\mathrm{d}F=2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$



端面所受侧压力为

$$F=\int_0^R 2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2g\rho}{3}R^3$$

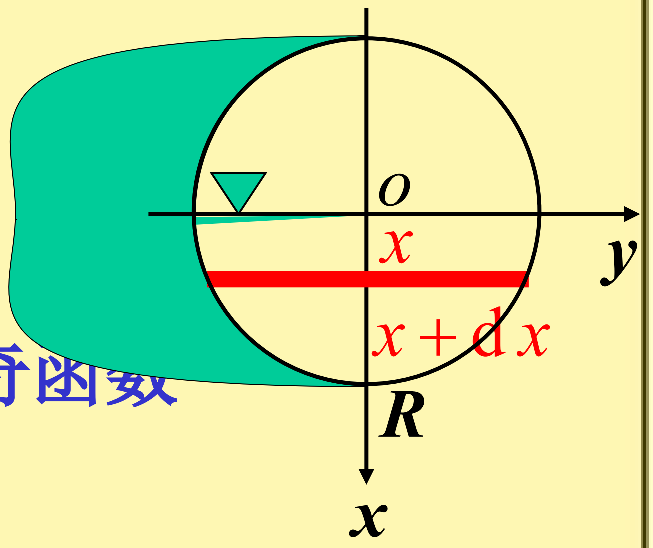
说明:当桶内充满液体时,小窄条上的压强为 $g\rho(R+x)$,

侧压力元素 $\mathrm{d}F = 2\, g\rho(R+x)\underline{\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x}$,

故端面所受侧压力为

$$F = \int_{-R}^{R} 2g\,\rho(R+\underline{x})\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

奇函数



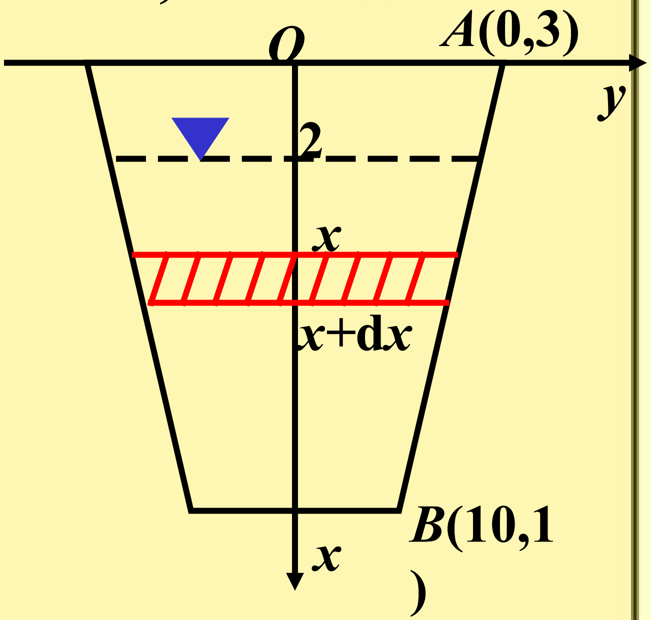
$$= 4Rg\rho\underbrace{\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x}_{\frac{1}{4}R^2\pi}$$

$$= \pi g\rho R^3$$

例 7. 有等腰梯形水闸，上底长 6m，下底 2m，高 10m。试求当水面位于上底下 2 m 时，闸门所受的水压力。

解： 建立坐标系如图所示。

直线 AB 的方程为 $y=-\dfrac{x}{5}+3$



窄条形所受的面积为

$$dS=2ydx=2(-\frac{3}{5}x+3)dx$$

窄条形所受的压力约为

$$\mathrm{d}F=\rho g(x-2)\cdot 2(-\frac{x}{5}+3)\mathrm{d}x$$

$$F=2\cdot\rho g\int_2^{10}(x-2)(-\frac{x}{5}+3)\mathrm{d}x$$

$$=2\rho g[-\frac{x^3}{15}+\frac{17}{10}x^2-6x]_2^{10}$$

$$=961.7(kN)\qquad \rho g=9.8KN/m^3$$

NJUPT

定积分的应用总结

一、内容提要

一、微元法基本思想

应用微元法的一般步骤：

(1) 根据具体问题，选取一个变量 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a, b]$；

(2) 在 $[a, b]$ 上，任取一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$；求出 $\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$

(3) 所求量 $A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

二、定积分的几何应用

1、平面图形的面积

2、平面曲线的弧长

3、体积

三、 定积分的物理应用

1、变力沿直线做功

2、液体对平面几何图形的侧压力