第 6 章　　常微分方程

6.1　常微分方程的基本概念

6.1.1　引例

6.1.2　微分方程的概念

6.1.3　微分方程的解

6.1、微分方程的基本概念

6.1.1、两个实例

例1 一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$，求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{其中 } x = 1\text{时}, \ y = 2$$

$$y = \int 2x dx \quad \text{即 } y = x^2 + C, \qquad \text{求得} C = 1,$$

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

例2 列车在平直的线路上以20米/秒的速度行驶，当制动时列车获得加速度-0.4米/秒^2，问开始制动后多少时间列车才能停住？以及列车在这段时间内行驶了多少路程？

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米, $s = s(t)$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4$$

$$t = 0\text{时}, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1$$

$$s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$$

代入条件后知 $C_1 = 20, \quad C_2 = 0$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$$

故 $$s = -0.2t^2 + 20t,$$

开始制动到列车完全停住共需 $t = \dfrac{20}{0.4} = 50(\text{秒}),$

列车在这段时间内行驶了

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$$

6.1.2 、微分方程的定义

微分方程：

凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

例 $y' = xy,$ $y'' + 2y' - 3y = e^x,$

$(t^2 + x)dt + xdx = 0,$ $\frac{\partial z}{\partial x} = x + y,$

实质： 联系自变量，未知函数以及未知函数的某些导数（或微分）之间的关系式.

分类 1: 常微分方程， 偏微分方程.

方程中未知函数为一元函数的称为常微分方程.

方程中未知函数为多元函数的称为偏微分方程.

微分方程的阶： 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称之.

分类 2:

一阶微分方程 $F(x,y,y')=0,\quad y'=f(x,y);$

二阶及二阶以上的方程称为高阶微分方程

高阶（n）微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

分类 3: 线性与非线性微分方程.

方程中未知函数及其各阶导数都是一次形式出现的方程称为线性微分方程.

$y'+P(x)y=Q(x)$, 线性 $x(y')^2-2yy'+x=0$; 非线性

6.1.3 、主要问题 ----- 求方程的解

微分方程的解：

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称之 .

微分方程的解的分类:

(1) 通解： 微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同 .

例 $y' = y,$ 通解 $y = Ce^x;$

$y'' + y = 0,$ 通解 $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x;$

(2) 特解： 确定了通解中任意常数以后的解

. **解的图象：** 微分方程的积分曲线 .

通解的图象： 积分曲线族 .

初始条件： 用来确定任意常数的条件 .

初值问题： 求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶：$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线；

二阶：$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

解的检验：代入法。

例3：求以$(x+C)^2+y^2=1$表示的函数$y=y(x)$为通解的微分方程

解：在$(x+C)^2+y^2=1$**两边对x求导**

$$2(x+C)+2yy'=0 \qquad \Rightarrow C=-yy'-x$$

代入$(x+C)^2+y^2=1$得

$y(x)$**为通解的微分方程**

$$y^2y'^2+y^2=1$$

6.2　一阶微分方程

6.2 一阶微分方程

一阶微分方程 $y' = f(x, y)$

对称形式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

视 y 为未知函数 $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

视 x 为未知函数 $\quad \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$

6.2.1 、可分离变量的一阶微分方程

一、可分离变量法

1．解法探求

一般的，如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)dy = f(x)dx$$

的形式，就是说，能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 dy，

另一端只含 x 的函数和 dx，那么原方程成为可分离变量的微分方程。

形如 $\underline{g(y)dy = f(x)dx}$ 可分离变量的微分方程.

例如 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \quad \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}dy = 2x^2 dx,$

解法 设函数$g(y)$和$f(x)$是连续的,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

分离变量法

设函数$G(y)$和$F(x)$是依次为$g(y)$和$f(x)$的原函数,

称 $G(y)=F(x)+C$ 为微分方程的解.(隐式通解)

2、典型例题

例1 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 分离变量 $\dfrac{dy}{y}=2xdx,$

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx,\quad \ln|y|=x^2+C_1$

$\therefore y=Ce^{x^2}$ 为所求通解. 其中$C=\pm e^{C_1}$

例 2 求微分方程 $(x+xy^2)dx+(y-x^2y)dy=0$ 的通解

解： 变形 $x(1+y^2)dx+y(1-x^2)dy=0$

分离变量 $$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{-x}{1-x^2}dx$$

两端积分 $$\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int\frac{-x}{1-x^2}dx$$

得 $$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+\frac{1}{2}\ln|C_2|$$

所以方程通解为 $1+y^2=C(1-x^2)$ 其中 $C=\pm|C_2|$

说明：任意常数的变形是为了解的表达式简单

例 3　求初值问题 $(1+e^x)yy'=e^x$，　$y|_{x=1}=1$

解　$$ydy=\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

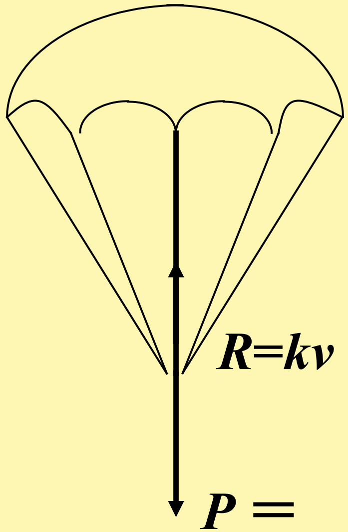
两边积分：$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C$

将$y|_{x=1}=1$代入：得：$C=\frac{1}{2}-\ln(1+e)$

特解为:

$$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+\frac{1}{2}-\ln(1+e)$$

例 4 设降落伞下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时 (t=0) 速度为零。求降落伞下落速度与时间的函数关系。



解： 设降落伞下落速度为 $v(t)$

降落伞在空中下落时所受外力为

$$F = mg - kv$$

根据牛顿第二运动定律 $F=ma$ 得函数 $v(t)$ 应满足的方程为

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \qquad （1）$$

按题意，初始条件为 $v\big|_{t=0} = 0$ 。

方程（1）是可分离变量。分离变量后得$\dfrac{dv}{mg-kv}=\dfrac{dt}{m}$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m}$,

考虑到 $mg-kv>0$，得$-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C_1$,

即 $$mg-kv=e^{-\frac{k}{m}t-kC_1},$$

或 $$v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}\qquad (C=-\frac{e^{-kC_1}}{k}),\qquad (2)$$

这就是方程（1）的通解。

将初始条件 $v|_{t=0}=0$ 代入（2）式，得 $C=-\dfrac{mg}{k}$,

于是所求的特解为 $$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

二、齐次方程

1. 定义 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$ 的微分方程称为**齐次方程**.

例如 $(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy=0$ 是齐次方程,

因为 $$f(x,y)=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

2. 解法 作变量代换 $u=\dfrac{y}{x}$, 即 $y=xu$,

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$, 代入原式 $u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$,

即 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{f(u)-u}{x}$.

可分离变量的方程

得 $\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|C_1 x|$,

即 $x = Ce^{\varphi(u)}$, （$\varphi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$）

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入,

得通解 $x = Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$

例 1　解方程 $xy' = y(1+\ln y - \ln x)$

解：原方程可记为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$

令 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $y = ux$　$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$

原方程变形为 $u + x\dfrac{du}{dx} = u(1+\ln u)$

得 $x\dfrac{du}{dx} = u\ln u$　分离变量得 $\dfrac{du}{u\ln u} = \dfrac{dx}{x}$

两端积分得 $\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln|C_1| = \ln|C_1 x|$，$\ln u = \pm C_1 x = Cx$，

$$u = e^{cx} = \frac{y}{x}$$

所以方程的通解为　$y = xe^{cx}$

例 2 求 $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ 的满足初始条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解

解： 令$u = \dfrac{y}{x}$ 则原方程变形为 $u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{u} + u$

分离变量得 $udu = \dfrac{dx}{x}$ 两端积分得 $u^2 = 2\ln|x| + C$

将$u = \dfrac{y}{x}$代入 得$y^2 = 2x^2\ln|x| + Cx^2$

由初始条件： $y|_{x=1}=2$ ，得 $C=4$ 。

方程的特解为 $y^2 = 2x^2\ln|x|+4x^2$

内容小结

1． 掌握微分方程的基本概念

微分方程

微分方程的阶，通解，特解，初始条件

初值问题

2． 一阶微分方程 $y' = f(x, y)$

1）可分离变量的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = M(x)N(y)$$

2）齐次方程 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

习题 6.2.1