6.2 一阶微分方程

6.2.2 、一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

1 、一阶线性微分方程的标准形式：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)\equiv 0$,上方程称为齐次的.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为非齐次的.

例如 $\frac{dy}{dx}=y+x^2$, $\frac{dx}{dt}=x\sin t+t^2$,非齐次线性方程

$yy'-2xy=3$, $y'-\cos y=1$, 非线性的.

2、一阶线性微分方程的解法

(1). 先求齐次线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,\ \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1$$

齐次方程的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}.\qquad \text{其中} C=\pm e^{C_1}$$

(2). 再求非齐次线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$.

若$y=y(x)$为方程的解，则

$$\frac{dy}{y}=\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]dx$$

两边积分 $\ln|y|=\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int P(x)dx$

设$\int\frac{Q(x)}{y}dx$为$v(x)$， $\therefore \ln|y|=v(x)-\int P(x)dx$

即 $y=\pm e^{v(x)}e^{-\int P(x)dx}$

$$=u(x)e^{-\int P(x)dx}$$ ---- 非齐次方程通解形式

与齐次方程通解相比： $C\Rightarrow u(x)$

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

实质： 未知函数的变量代换.

新未知函数 $u(x) \Rightarrow$ 原未知函数 $y(x)$,

作变换 $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx},$$

将y和y'代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$,

即$u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$

积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$

一阶线性非齐次微分方程的通解为：

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

解的结构：非齐次线性方程的通解 = 对应齐次方程的通解 + 非齐次线性方程的一个特解。

例 1 求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}, y|_{x=\pi} = 1$的特解.

解法一：常数变易法:

对应的齐次方程的通解: $y = C_1 e^{-\int \frac{1}{x}dx} = C_1 e^{-\ln|x|} = \frac{C_1}{|x|} = \frac{C}{x}$

令 $y = \frac{C(x)}{x}$ 代入原方程:

$$\frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{C(x)}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow C'(x) = \sin x \qquad C(x) = -\cos x + C$$

非奇次方程的通解: $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$.

将$x = \pi, y = 1$代入$y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$.

$C = \pi - 1, \Rightarrow y = \frac{1}{x}(-\cos x + \pi - 1)$.

求方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}, y\big|_{x=\pi}=1$的特解.

解法二： 公式法 $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=\frac{\sin x}{x}$,

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)$$

$$=e^{-\ln|x|}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\ln|x|}dx+C_1\right)$$ 其中$C=\pm C_1$

$$=\frac{1}{|x|}\left(\operatorname{sgn}x\int\sin x dx+C_1\right)\quad=\frac{1}{x}(-\cos x+C).$$

将$x=\pi, y=1$代入$y=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$.

$$C=\pi-1,\Rightarrow\ y=\frac{1}{x}(-\cos x+\pi-1).$$

一般: $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=\frac{\sin x}{x}$,

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\ln x}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int\sin x dx+C\right)\quad=\frac{1}{x}\left(-\cos x+C\right).$$

将$x=\pi, y=1$代入$y=\frac{1}{x}\left(-\cos x+C\right).$

$C=\pi-1, \Rightarrow y=\frac{1}{x}\left(-\cos x+\pi-1\right).$

例 2 求$(y^3-x)y'=y,\quad y\big|_{x=0}=1$的特解

解 方程化为：$\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1}{y}x=y^2$

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}[\int e^{\int\frac{1}{y}dy}\cdot y^2dy+C]$$

$$=e^{-\ln y}[\int e^{\ln y}\cdot y^2dy+C]=\frac{1}{y}[\frac{y^4}{4}+C]$$

将$x=0,y=1$代入，得$C=-\dfrac{1}{4}$.

特解为： $xy=\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{1}{4}$

注 $\dfrac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$—— 为 x 的一阶线性方程

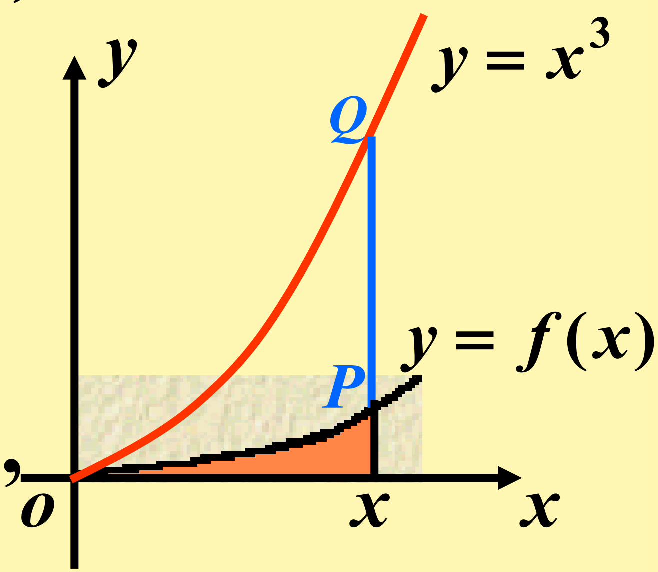
通解为：$x=e^{-\int P(y)dy}[\int e^{\int P(y)dy}Q(y)dy+C]$

例 3 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3$ $(x\geq 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $y=f(x)$.

解：按题意建立方程 $\int_0^x f(t)dt = x^3 - f(x)$

两边求导得 $f(x) = 3x^2 - f'(x)$

解此微分方程 $y' + y = 3x^2$



$$y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx} dx\right]$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -6$,

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2)$.

NJUPT

二、伯努利方程

伯努利 (Bernoulli) 方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (n \neq 0,1)$$

当$n = 0,1$时，方程为**线性微分方程**.

当$n \neq 0,1$时， 方程为**非线性微分方程**.

解法： 需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以y^n，得 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

$$\frac{1}{-n+1}\frac{dy^{-n+1}}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

即 $\dfrac{dy^{-n+1}}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x)$,

令$z=y^{1-n}$,方程变为

代入上式 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$代入即可。

$$\therefore y^{1-n}=z$$

$$=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right).$$

例 4 求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解 $n=\frac{1}{2}$ 令 $z=\sqrt{y}$，则 $y=z^2, \frac{dy}{dx}=2z\frac{dz}{dx}$

代入方程化为: $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{1}{2}x^2,$

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{2\ln x}\left(\int\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-2\ln x}dx+C\right)$$

$$=x^2\left(\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x^2}dx+C\right)=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)$$

原方程通解为: $y=x^4\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$

例 5 求方程$(y^4-3x^2)dy+xydx=0$的通解

解 **方程化为**$:\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{3}{y}x=-\dfrac{y^3}{x}$

令 $z=x^2$ 即$x=\sqrt{z}, \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\dfrac{dz}{dy}$

方程化为$:\dfrac{dz}{dy}-\dfrac{6}{y}z=-2y^3$

通解为$: x^2=y^4+cy^4$

内容小结

1、一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

2、伯努利方程

$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (n \neq 0，1)$

令 $z = y^{1-n}$ 而将原方程化为一阶线性微分方程。

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Qx)$$

习题 6.2.2

6.2.3　可降阶的高阶微分方程

一、$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

$$y^{(n)}=f(x) \qquad (1)$$

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$$

$$y^{(n-2)}=\int[\int f(x)dx]dx+C_1x+C_2$$

依此法积分 n 次就可得到（1）的通解。

例 1　求微分方程 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解。

解：对所给方程接连积分三次，得

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C,$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + Cx + C_2,$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3 \left(C_1 = \frac{C}{2}\right).$$

这就是所求的通解。

二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程

方程 $y''=f(x, y')$ 右端不显含 y

设 $y'=p$，那末 $y''=\dfrac{dp}{dx}=p'$,

而方程就成为 $p'=f(x, p)$

这是一个关于变量 x 、p 的一阶微分方程。

设其通解为 $p=\varphi(x, C_1)$,

因为 $p=\dfrac{dy}{dx}$, 即 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(x, C_1)$.

对它进行积分，便得方程的通解

$$y=\int\varphi(x, C_1)dx+C_2$$

例 2　求微分方程 $xy''-y'=x^2$ 的满足初始条件 $y(1)=1$，

解：(1) 所给方程是 $y''=f(x, y')$ 型．

令 $y'=p$ 代入方程得 $xp'-p=x^2$，

即
$$p'-\frac{1}{x}p=x$$

这是个一阶非齐次线性方程，其通解为

$$p=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)$$
$$=x\left(\int dx+C_1\right)=x^2+C_1x$$

由 $y'(1)=2$，得 $2=1+C_1$，

$C_1=1$ 所以 $y'=x^2+x$

两端再积分得

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+C_2$$

由 $y(1)=1$，得 $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+C_2$

$$C_2=\frac{1}{6}.$$

所求特解为

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}.$$

例 3. 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解：设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C|$,

即 $p=C_1(1+x^2)$ 令 $C_1=\pm|C|$

利用 $y'\big|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$，于是有 $y'=3(1+x^2)$

两端再积分得 $y=x^3+3x+C_2$

利用 $y\big|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，

因此所求特解为 $y=x^3+3x+1$

三、$y''=f(y, y')$ 型的微分方程

方程 $y''=f(y, y')$ 中不显含 x

令 $y'=p(y)$，并利用复合函数的求导法则把 y'' 化为对 y 的导数，即

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

这样，方程就成为 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p).$

这是一个关于变量 y、p 的一阶微分方程。设它的通解为 $y'=p=\varphi(y,C_1)$

分离变量并积分，便得方程的通解为

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$$

例 4 求方程 $1+(y')^2 = 2yy''$ 的通解。

解： 令 $y' = p(y)$， 则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

原方程变形为 $2yp\dfrac{dp}{dy} = 1 + p^2$

分离变量 $\dfrac{2p}{1+p^2}dp = \dfrac{dy}{y}$ 令 $C_1 = \pm|C|$

两端积分 $\ln(1+p^2) = \ln|y| + \ln|C|$

$p = \pm\sqrt{C_1 y - 1} = \dfrac{dy}{dx}$ $\pm\dfrac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx.$

积分得 $\pm\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2'.$ $C_2 = \dfrac{C_1 C_2'}{2}$

整理得通解为 $y = \dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{2}C_1 x + C_2\right)^2 + \dfrac{1}{C_1}.$

例 5. 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

代入方程得 $yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$,

即 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ (1) 或 $p = 0$ (2)

(1) 化为一阶线性齐次方程 $p' - \frac{1}{y}p = 0$ 通解 :$p = C_1 y$,

$\therefore$ $y' = C_1 y$ （一阶线性齐次方程）

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$

(2) 得 $y = C$ 奇解

内容小结

1、掌握可降阶的高阶微分方程 的求解

1） $y^{(n)}=f(x)$ 型 n 次积分

2） $y''=f(x, y')$ 型 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$

3） $y''=f(y, y')$ 型 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$