6.3　高阶线性微分方程

6.3 、高阶线性微分方程及其通解的结构

一．相关概念

1．高阶线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

这里 $n\geqslant 2$， $a_i(x)$ 及 $f(x)$ 在某区间 I 上连续

2．函数的线性相关、线性无关

定义：设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数若存在不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv 0,\quad x\in I$$

则称这 n 个函数在 I 上线性相关，否则称为线性无关．

例如，$1, \cos^2 x, \sin^2 x$，在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都线性相关；

又如，$1, x, x^2$，若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$，

则根据二次多项式至多只有两个零点，可见 k_1, k_2, k_3

必需全为 0，故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都线性无关.

对于两个函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$，若

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \text{常数} \quad \left(\text{或} \frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \text{常数}\right)$$

则 y_1，y_2 线性相关，否则线性无关.

二、齐次线性微分方程解的结构（以二阶为例）

定理 1. 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

的两个解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$（$C_1, C_2$ 为任意常数）也是该方程的解　（叠加原理）

证明： 将 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 代入方程左边，得

$$[C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + P(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]$$

$$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0$$

证毕

说明：

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解

例如，$y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解，则

$y_2(x)=2y_1(x)$ 也是齐次方程的解

但是 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=(C_1+2C_2)y_1(x)$ 并不是通解

定理 2. 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 是该方程的通解。

例如，方程 $y''+y=0$ 有特解 $y_1=\cos x, y_2=\sin x$，且 $\frac{y_2}{y_1}=\tan x \neq$ 常数，故方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

推论. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关解,则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k \text{为任意常数})$$

三、非齐次线性微分方程解的结构

定理 3. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解,则

$$y = Y(x) + y^*(x) \qquad ②$$

是非齐次方程的通解 .

证明： 将$y=Y(x)+y^*(x)$代入方程①左端，得

$$(Y''+y^{*\prime\prime})+P(x)(Y'+y^{*\prime})+Q(x)(Y+y^*)$$

$$=(y^{*\prime\prime}+P(x)y^{*\prime}+Q(x)y^*)+(Y''+P(x)Y'+Q(x)Y)$$

$$=f(x)+0=f(x)$$

故 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的解，又 Y 中含有两个独立任意常数，因而 ② 也是通解 证毕

例如， 方程$y''+y=x$ 有特解 $y^*=x$

又$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$是对应齐次方程的通解

因此该方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$

定理 4. 设 $y_k^*(x)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x) \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

的特解,则 $y=\sum_{k=1}^{m} y_k^*$ 是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$$

的特解.(非齐次方程之解的叠加原理)

定理 3, 定理 4 均可推广到 n 阶线性非齐次方程.

定理 5. 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 n 个线性无关特解，$y^*(x)$ 是非齐次方程的特解，则非齐次方程的通解为

$$y=\underline{C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)}+y^*(x)$$

$$=Y(x)+y^*(x)$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

例 1. 已知微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$, 求此方程的通解

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$$

注: 若 y_1, y_2 是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的两个解,

则 $y_1 - y_2$ 是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的一个解.

内容小结

1、掌握可降阶的高阶微分方程 的求解

1） $y^{(n)}=f(x)$ 型 n 次积分

2） $y''=f(x, y')$ 型 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$

3） $y''=f(y, y')$ 型 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$

2、掌握线性微分方程解的性质与结构

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \quad (1)$$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \quad (2)$$

掌握线性微分方程解的性质与结构

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (2)$$

(1) 若 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$ 是方程（ 2 ）的两个线性无关的特解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程（ 2 ）的通解。

(2) 若 y^* 是方程（ 1 ）的一个特解， Y 是方程（ 1 ）所对应的齐次方程的通解，则 $y=Y+y^*$ 是方程（ 1 ）的通解。

(3) y_1, y_2 是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的两个解，则

$y_2 - y_1$ 是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y$ 的一个解。

(4) 设 y_1^* 、 y_2^* 分别是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$ 和 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$ 的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 为方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的一个特解

N.H.U.P.T