6.3　高阶线性微分方程

6.3.2、 n 阶常系数齐次线性微分方程

n 阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=f(x)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y''+py'+qy=0$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y''+py'+qy=f(x)$$

一、二阶常系数齐次线性微分方程：

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{为常数}) \qquad ①$$

因为 r 为常数时函数 e^{rx} 和它的导数只差常数因子，

所以令①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数) 代入①得

$$(r^2 + pr + q)\,e^{rx} = 0$$

$$\longrightarrow r^2 + pr + q = 0 \qquad ②$$

称②为微分方程①的特征方程，其根称为特征根.

1. 当 $p^2 - 4q > 0$时，②有两个相异实根 r_1，r_2，则微分方程有两个线性无关的特解：$y_1 = e^{r_1 x}$，$y_2 = e^{r_2 x}$，

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2. 当$p^2-4q=0$时，特征方程有两个相等实根$r_1=r_2$ $=-\frac{p}{2}$，则微分方程有一个特解 $y_1=e^{r_1 x}$．

设另一特解 $y_2=y_1 u(x)=e^{r_1 x}u(x)$ ($u(x)$ 待定)

代入方程得：

$$\cancel{e^{r_1 x}}\left[(u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu\right]=0$$

$$u''+(\underline{2r_1+p})u'+(\underline{r_1^2+pr_1+q})u=0$$

注意 r_1 是特征方程的重根

$$u''=0$$

取 $u=x$，则得 $y_2=x\,e^{r_1 x}$，因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1 x}$$

3. 当$p^2-4q<0$时，特征方程有一对共轭复根

$$r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,\quad r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$$

这时原方程有两个复数解：

$$y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x)$$

$$y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x)$$

利用解的叠加原理，得原方程的线性无关特解：

$$\overline{y_1}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\overline{y_2}=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

的通解的步骤如下：

第一步　写出微分方程的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$,

第二步　求出特征方程的两个根 r_1，r_2，

第三步　根据下表写出通解：

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

例 1 求方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+4r+4=0$,

解得 $r_1=r_2=-2$,

故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

例 2 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+2r+5=0$,

解得 $r_{1,2}=-1\pm 2i$,

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

例 3 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解。

解 特征方程为 $r^2-2r-3=0$，

其根 $r_1=-1$， $r_2=3$ 是两个不相等的实根，因此

所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

例 4 已知 $y=xe^x$ 是某二阶常系数齐次线性微分方程的一个解，求此微分方程。

解： 由题设知 $r=1$ 是特征方程的二重根，

所以特征方程为 $(r-1)^2=0$

即 $r^2-2r+1=0$

所求的微分方程为 $y''-2y'+y=0$

二、n 阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$$

特征方程为 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
(i) 单实根 r	给出一项：e^{rx}
(ii) 一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$
(iii) k 重实根 r	给出 k 项：$e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \cdots, x^{k-1}e^{rx}$
(iv) 一对 k 重根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出 $2k$ 项：$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

例 5 求方程

$$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$$ 的通解.

解 特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0,$

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为 $r_1=-1,\quad r_2=r_3=i,\quad r_4=r_5=-i,$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

6.3.3 、常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数线性非齐次微分方程 ：

$$y'' + p y' + q y = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数})$$

根据解的结构定理 ，其通解为

$$y = \underbrace{Y}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{y^*}_{\text{非齐次方程特解}}$$

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

一　$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

特例：$\lambda=0$ 时，$f(x)=P_m(x)$　　多项式型

$m=0$时，$f(x)=Ae^{\lambda x}$　　指数函数型

设非齐方程特解为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$$

代入原方程

$$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)}Q'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若λ不是特征方程的根，$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$,

可设 $Q(x)=Q_m(x)$,　$y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$;

(2) 若λ是特征方程的单根，

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p \neq 0,$$

可设 $Q(x) = xQ_m(x)$， $y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}$；

(3) 若λ是特征方程的重根，

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, 2\lambda + p = 0,$$

可设 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$， $y^* = x^2 Q_m(x)e^{\lambda x}$.

综上讨论

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$， $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根,} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

注意　上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程（k 是重根次数）.

$$Q''(x) + \underline{(2\lambda + p)}Q'(x) + \underline{(\lambda^2 + p\lambda + q)}Q(x) = P_m(x)$$

例 1 求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $r^2-3r+2=0,$

特征根 $r_1=1,\ r_2=2,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x},$

$\because \lambda=2$ 是单根, 设 $y^*=x(Ax+B)e^{2x},$

代入方程, 得 $2Ax+B+2A=x$ $\therefore \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1 \end{cases}$

于是 $y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

原方程通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}.$$

例2 求 $y'' - 2y' + y = 4xe^x$ 的通解

解： 特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0$

特征根 $r_1 = r_2 = 1$

齐次方程的通解 $Y = (C_1 + C_2 x)e^x$

$P_m(x) = 4x$ 是一次多项式， $\lambda = 1$ 是特征方程的二重根，

设 $y^* = x^2(Ax + B)e^x$

代入方程并约去 e^x 可得 $6Ax + 2B = 4x$

比较系数可得 $\begin{cases} 6A = 4 \\ 2B = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} A = \dfrac{2}{3} \\ B = 0 \end{cases}$

所以 $y^* = \dfrac{2}{3}x^3 e^x$

方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \dfrac{2}{3}x^3 e^x$

例3 求 $y''+y'=2x^2-3$在初始条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 下的特解

解：特征方程为 $r^2+r=0$

特征根 $r_1=0$,（单实根） $r_2=-1$

齐次方程的通解 $Y=C_1+C_2e^{-x}$

设$y^*=x(Ax^2+Bx+C)$

代入方程可得 $3Ax^2+(6A+2B)x+2B+C=2x^2-3$

解得：$A=\frac{2}{3}$, $B=-2$, $C=1$

方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{2}{3}x^3-2x^2+x$

代入初始条件得 $C_1=-1$, $C_2=1$

特解为 $y=-1+e^{-x}+\frac{2}{3}x^3-2x^2+x$

例 4　写出下列方程的通解形式

(1)　$y'' - y = (2x^2 - 3)e^x$

(2)　$y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$

解　(1)　特征方程 $r^2 - 1 = 0$，$r = \pm 1$

特解形式：$y^* = x(Ax^2 + Bx + C)e^x$

通解形式：$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + x(Ax^2 + Bx + C)e^x$

(2)　特征方程 $r^2 - r = 0$，$r = 0, 1$

对于$y'' - y' = 2x - 1$，　$y_1^* = x(Ax + B)$

对于$y'' - y' = -3e^x$，　$y_2^* = Cxe^x$

通解形式：$y = C_1 + C_2 e^x + x(Ax + B) + Cxe^x$

二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式，$m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是根}\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是单根}\end{cases},$$

注意

上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程.

例5　求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解

解： 所给方程是二阶常系数非齐次线性方程，且

$f(x)$ 属于 $e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

（其中 $\lambda=0$，　$\omega=2$，　$P_l(x)=x, P_n(x)=0$ ）。

它的特征方程为　　　$r^2+1=0$

由于这里 $\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x.$$

把它代入所给方程，得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较两端同类项的系数，得

$$\begin{cases} -3a=1 \\ -3b+4c=0 \\ -3c=0, \\ -3d-4a=0, \end{cases}$$

由此解得 $a=-\dfrac{1}{3}, b=0, c=0, d=\dfrac{4}{9}$

于是求得一个特解为

$$y^* = -\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x.$$

例6　求微分方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的通解

解：对应的齐次方程为　$y''+4y=0$

特征方程为　$r^2+4=0$

特征根　$r_{1,2}=\pm 2i$

齐次方程的通解　$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

$\lambda\pm\omega i=\pm 2i$　是特征根，所以特解形式为

$$y^*=x[a\cos 2x+b\sin 2x]$$

代入原方程并化简可得

$$4b\cos 2x-4a\sin 2x=\cos 2x$$

比较系数可得　$a=0$，$b=\dfrac{1}{4}$

所以　$y^*=\dfrac{x}{4}\sin 2x$

原方程的通解为　$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{x}{4}\sin 2x$

例6　求微分方程 $y''+4y=2\sin^2 x$ 的通解

解: $$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$$

$$f(x)=2\sin^2 x=1-\cos 2x$$

对应于 $f_1(x)=1$，可令 $y_1^*=A$，易求 $A=\frac{1}{4}=y_1^*$

得

对应于 $f_2(x)=-\cos 2x$，由上例可知 $y^*=-\frac{x}{4}\sin 2x$

所以 $$y^*=\frac{1}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x$$

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x$$

例 7 求 $y''+4y=2\sin^2 x$ 的满足初始条件 $y|_{x=0}=0$， $y'|_{x=0}=1$ 的特解。

解： 由上例知方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x$$

$$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x$$

由初始条件可得 $\begin{cases}0=C_1+\dfrac{1}{4}\\ 1=2C_2\end{cases}$ 即有 $\begin{cases}C_1=-\dfrac{1}{4}\\ C_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

所求特解为

$$y=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x$$

6.3.4、欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程（其中 p_1， p_2，…， p_n 为常数），叫做欧拉方程。

作变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$

将自变量 x 换成 t，我们有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$,

$$\boxed{\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{x\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right]-\frac{dy}{dt}}{x^2}$$

$$=\frac{x\left[\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right]-\frac{dy}{dt}}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right).$$

如果采用记号 D 表示对 t 求导的运算 $\frac{d}{dt}$，

那末上述运算结果可以写成 $xy'=Dy$,

$$x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=\left(\frac{d^2}{dt^2}-\frac{d}{dt}\right)y$$

$$=(D^2-D)y=D(D-1)y,$$

$$x^3y'''=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}$$

$$=(D^3-3D^2+2D)y=D(D-1)(D-2)y,$$

一般地，有 $x^ky^{(k)}=D(D-1)\ldots(D-k+1)y$

把它代入欧拉方程，便得一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程。

例 1. 求方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2\ln x$ 的通解.

解：令 $x = e^t$, 则 $t = \ln x$, 记 $D = \dfrac{d}{dt}$, 则原方程化为

$$D(D-1)y - 2D\,y + 2y = t^2 - 2t$$

即 $$(D^2 - 3D + 2)y = t^2 - 2t$$

亦即 $$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = t^2 - 2t \qquad ①$$

特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 其根 $r_1 = 1, r_2 = 2$,

则①对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

设特解： $y^* = At^2 + Bt + C$

代入①确定系数，得

$$y^* = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

① 的通解为

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

换回原变量，得原方程通解为

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = t^2 - 2t \qquad ①$$

例 2. 求方程 $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ 的通解.

解： 将方程化为 $x^2 y'' - x y' + y = 2x$ （欧拉方程）

令 $x = e^t$，记 $D = \frac{d}{dt}$， 则方程化为

$$[D(D-1) - D + 1]\,y = 2e^t$$

即 $$(D^2 - 2D + 1)\,y = 2e^t \quad ②$$

特征根：$r_1 = r_2 = 1$，

设特解：$y = A t^2 e^t$，代入 ② 解得 A = 1，所求通解为

$$y = (C_1 + C_2 t)e^t + t^2 e^t$$

$$= (C_1 + C_2 \ln x)x + x \ln^2 x$$

内容小结

1、掌握二阶常系数齐次线性方程的求解

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

2、掌握 n 阶常系数齐次线性方程解法

3、掌握二阶常系数非齐次线性微分方程解法

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad \text{通解 } y=Y+y^*$$

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

设 $y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x)$, $\quad k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是根}\\ 1 & \lambda\text{是单根}\\ 2 & \lambda\text{是重根}\end{cases}$,

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

设 $y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$,

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式, $\quad m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是特征方程的根时};\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是特征方程的单根时}.\end{cases}$$

5、掌握欧拉方程的求解

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

令 $x = e^t$， $D = \dfrac{d}{dt}$

则有$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

从而化为以 t 为自变量，以 y 为未知函数的 n 阶常系数线性微分方程