微分方程习题课

一、内容与要求

1．掌握微分方程的基本概念

2．掌握一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 的求解

1）可分离变量的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = M(x)N(y)$$

2）齐次方程 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

3）一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

4）伯努利方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$

例 1　解下列方程

(1) $$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}e^{y^2+3x}=0$$

(2) $$xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$$

(3) $$x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$$

(4) $$y'=\frac{1}{xy+y^3}$$

(1) 求 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{y}e^{y^2+3x}=0$的通解。

解：变形 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y}e^{y^2}\cdot e^{3x}$$

分离变量 $$-ye^{-y^2}dy=e^{3x}dx$$

积分得 $$\frac{1}{2}e^{-y^2}=\frac{1}{3}e^{3x}+C_1$$

方程通解为 $$2e^{3x}-3e^{-y^2}=C$$

$(C=-6C_1)$

(2) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

解： 变形 $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + (\dfrac{y}{x})^2}$

令 $u = \dfrac{y}{x}$， $y = ux$，则 $y' = u + xu'$，

代入原方程得 $x\dfrac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}$

分离变量 $\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \dfrac{dx}{x}$

两边积分 $\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln|x| + \ln|C_1|$

$u + \sqrt{1+u^2} = Cx$ 其中 $C = \pm|C_1|$

故原方程的通解为 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$

$$(3)x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$$

解法一：齐次方程（略）

解法二：
$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^3+y^3}{x^2y}=\frac{1}{y}x+y^2x^{-2}$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}\cdot x=y^2x^{-2}$$ —— 伯努利方程

令 $z=x^3$，方程化为$\frac{dz}{dy}-\frac{3}{y}z=3y^2$

所以
$$z=e^{\int\frac{3}{y}dy}\left(\int 3y^2e^{\int-\frac{3}{y}dy}dy+C_1\right)$$

$$=y^3\left(\int\frac{3}{y}dy+C\right)=Cy^3+y^3\ln|y|$$

原方程的通解为 $x^3=Cy^3+y^3\ln|y|$

(4) 求 $y' = \dfrac{1}{xy + y^3}$ 的通解。

解: $$\frac{dx}{dy} = xy + y^3$$

$$\frac{dx}{dy} - yx = y^3$$ —— 一阶线性微分方程

$$x = e^{\int y dy}\left(\int y^3 e^{\int -y dy} dy + C\right)$$

$$= e^{\frac{y^2}{2}}\left(\int y^3 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + C\right)$$

$$= -y^2 - 2 + Ce^{\frac{y^2}{2}}$$

例 2 设 $F(x)=f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0$, $f(x)+g(x)=2e^x$.

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程 ;

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式 .

解: (1) $\because\ F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$=g^2(x)+f^2(x)$$

$$=[g(x)+f(x)]^2-2f(x)g(x)$$

$$=(2e^x)^2-2F(x)$$

所以 $F(x)$ 满足的一阶线性非齐次微分方程:

NJUPT

$$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$$

(2) 由一阶线性微分方程解的公式得

$$F(x)=e^{-\int 2\,\mathrm{d}x}\left[\int 4e^{2x}\cdot e^{\int 2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{-2x}\left[\int 4e^{4x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{2x}+Ce^{-2x}$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，

得 $C=-1$

于是 $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$

例 3. 由坐标原点向曲线的切线所作垂线之长等于切点的横坐标，求此曲线方程.

解. **设曲线方程为**：$y = f(x)$

在(x, y)处的切线方程：$Y - y = y'(X - x)$

根据题设: $\dfrac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + y'^2}} = x$ 即: $y' - \dfrac{1}{2x} y = -\dfrac{x}{2} y^{-1}$

令$z = y^2$,解此伯努利方程得

$$y^2 = x(C - x)$$

例 4. 已知曲线c过点$A(1,0)$及$B(0,1)$, 且$\overset{\frown}{AB}$为凸弧，P为曲线c上异于B的任一点，已知弧$\overset{\frown}{PB}$与弦PB所围的图形的面积为P的横坐标的立方，求此曲线方程

解． 设曲线：$y = f(x)$

建立微分方程： $\int_0^x f(t)dt - \frac{[f(x)+1]x}{2} = x^3$

求导：$f(x) - \frac{f(x)+1}{2} - \frac{x}{2}f'(x) = 3x^2$且$f(1) = 0$

求导： $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x} - 6x$且$y(1) = 0$

解得$y = f(x) = -6x^2 + 5x + 1, \qquad x \in [0,1]$

例5、求一连续函数$f(x)$,满足$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)dt$

解：令$x-t=u$　　$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$

方程化为：$f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)du$

求导方程化为求初值问题：$\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

求得$f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x-e^{-x})$