微分方程习题课

一、内容与要求

1、掌握可降阶的高阶微分方程的求解

2、掌握线性微分方程解的性质与结构

3、掌握高(二)阶常系数齐次线性方程解法

4、掌握二阶常系数非齐次线性微分方程解法

5、了解欧拉方程的求解

例 1 求以 $2xe^x$ 、 $\sin 2x$ 为解的阶数最低的常系数齐次线性微分方程为 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$

解: 由题意知 $r=1$ 是特征方程的重根，$r=\pm 2i$, 是特征方程的根．要使微分方程的阶最低，故特征方程为

$$(r-1)^2(r-2i)(r+2i)=0$$

即
$$r^4-2r^3+5r^2-8r+4=0$$

所求微分方程为

$$y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$$

例 2　设 $f(x)$ 为连续函数，且满足

$$f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)dt,$$ 求 $f(x)$。

解：

$$\underline{f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}-x\cancel{f(x)}+x\cancel{f(x)}$$

$$\underline{\begin{cases} f''(x)+f(x)=e^x & (1) \\ f(0)=1, \quad f'(0)=1 \end{cases}}$$

$$r^2+1=0, \Rightarrow r_{1,2}=\pm i \quad Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

令 $y^*=Ae^x$ 代入 (1) 可求得 $A=\frac{1}{2}$

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x \Rightarrow C_1=C_2=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$$

例 3. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续二阶导数，且 $y'\neq 0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数，

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程

$$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$$

变换为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

解：(1) 由反函数的导数公式知 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$,

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''\frac{dx}{dy}}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

代入原微分方程得

$$y'' - y = \sin x \qquad ①$$

(2) 方程①的对应齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

设①的特解为 $y^* = A\cos x + B\sin x$,代入①得 $A = 0$,

$B = -\dfrac{1}{2}$, 故 $y^* = -\dfrac{1}{2}\sin x$, 从而得①的通解：

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

由初始条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{3}{2}$ 得

$$C_1 = 1,\ C_2 = -1$$

故所求初值问题的解为 $y = e^{x} - e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x$