第 3 章　第一次习题课

一、内容与要求

1．几个重要定理

费马定理，罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理

2 掌握用洛必达法则求极限的方法，注意与其它求极限的方法结合使用。

3　掌握函数 $f(x)$ 的带拉格朗日，佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式（麦克劳林公式）的展开 。

熟记$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$的麦克劳林公式，并会用此求极限判别无穷小的阶。

二、典型例题

1、求极限

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

3、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$

4、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$

5、设$f(x)$在$x=a$处二阶可导，

求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}$

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{e}{2}$$

$$2、\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad (\infty-\infty)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \qquad =2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}$$

或 $$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\frac{1}{3}$$

3、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ (1^{∞})

解法一

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a^{x+1}\ln a+b^{x+1}\ln b+c^{x+1}\ln c}{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}}$$

$$=e^{\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}}=(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

$$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

解法二

$$\lim_{x\to 0} v(u-1) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{(a+b+c)x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^{x+1}\ln a+b^{x+1}\ln b+c^{x+1}\ln c}{(a+b+c)}$$

$$= \frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{(a+b+c)}$$

$$\text{原极限} = e^{\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}}$$

$$\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$

4、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2(1-\ln x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\left(-\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=0$$

或原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=0$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$

5、设$f(x)$在$x=a$处二阶可导，

求$\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}$

解：原式$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{2h}$ (洛必达法则）

$=\dfrac{f''(a)}{2}$ (二阶导数定义）

2 中值等式的证明

例 1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$, 证明$\exists\xi\in(a,b)$, 使$f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0$. (α为一实数)

分析 $f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha\xi}f'(\xi)+\alpha e^{\alpha\xi}f(\xi)=0$$

$$\Leftrightarrow [e^{\alpha x}f(x)]'_{x=\xi}=0$$

证明 令$\varphi(x)=e^{\alpha x}f(x)$, 利用罗尔定理即可.

注 常用辅助函数：$x^k f(x),(x-a)^k f(x),f(x)e^{g(x)}$, $f(x)g(x),\dfrac{f(x)}{x},\dfrac{f(x)}{g(x)}$等.

例 2 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明:

$$\exists \xi \in (a,b), \text{使} f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}.$$

分析 要证$f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$

$$\Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi)(\xi - b) = f(a).$$

证明 令$\varphi(x) = (x - b)f(x)$, 在$[a,b]$利用

拉格朗日值定理

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a) \quad \xi \in (a,b),$$

即$f(\xi) + f'(\xi)(\xi - b) = f(a).$

例 3 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明:

$$\exists \xi,\eta \in (a,b), \text{使} f'(\xi) = \frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}.$$

证明 $f(x)$在$[a,b]$上利用拉格朗日中值定理

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad a<\xi<b \quad (1)$$

$f(x), g(x)=x^2$在$[a,b]$上利用柯西中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta} \quad a<\eta<b \quad (2)$$

由 (1),(2) 得 $$f'(\xi) = \frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}$$

例 4 设$f(x)$在$[a,b]$上可导，$a,b>0$，证明$\exists\xi\in(a,b)$，

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

证明 令$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}, G(x)=\dfrac{1}{x}$

在 $[a\ ,\ b]$ 上由柯西中值定理得

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}$$

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

例 5　总习题三　第 5 题

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，

$f(0)=f(1)=0,\ f(\frac{1}{2})=1$，证明$\exists\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=1$

证明　令$F(x)=f(x)-x$在$[\frac{1}{2},1]$上连续

$$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}>0$$

$$F(1)=f(1)-1=-1<0$$

根据零点定理，知由$\xi_1\in(\frac{1}{2},1)$，$F(\xi_1)=0$

又$F(x)$在$[0,\ \xi_1]$上满足罗尔定理的条件

$\exists\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$，使$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=1$

3　中值定理的其它应用

(1) 证明恒等式； (2) 证明不等式； (3) 零点 (导函数) 的问题

例 7 设$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots\frac{a_n}{n+1}=0$, 证明多项式

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$在(0,1)内至少有一零点

证明 令$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

$$F(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=F(0)=0$$

根据罗尔定理$\exists\xi\in(0,1)$ $F'(x)=0$

即$f(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$在(0,1)内至少有一零点。

4. 泰勒公式（麦克劳林公式）

1). 求函数 $f(x)$ 的带拉格朗日，佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式（麦克劳林公式）的展开

2). 利用泰勒公式 (带佩亚诺余项的麦克劳林公式) 求极限

3)． 泰勒公式用于无穷小的阶的估计

4)． 泰勒公式用于求函数某点的导数

5)． 泰勒公式用于证明

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解 原式

$$=\lim_{x\to0}\frac{[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)]-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)]}{x^2[x+(-x-\frac{(-x)^2}{2}+o(x^2))]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!\cdot4}]x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{[\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!\cdot4}]+o(x)}{-\frac{1}{2}+o(x)}$$

$$=\frac{1}{6}$$

例 2 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且有

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3,\quad \text{求} f(0),\ f'(0),\ f''(0).$$

解 $$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x^2}\right)}=e^3$$

$$\Rightarrow 2=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}$$

由此可得 $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=4$

例 3 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数,

$f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(\frac{1}{2})=0$, 证明 $(0,1)$ 内至少存在

一点 ξ, 使得 $|f'''(\xi)|\ge 24$

证明：由题设 对 $x\in[0,1]$, 有

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\frac{1}{2})^3$$

$$=f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\frac{1}{2})^3$$

(其中 ζ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

分别令 $x=0,1$, 得

NJUPT

$$1 = f(0) = f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2!} f''(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3!} f'''(\zeta_1)(-\frac{1}{2})^3$$

$$(\zeta_1 \in (0, \frac{1}{2}))$$

$$2 = f(1) = f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2!} f''(\frac{1}{2})\ (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3!} f'''(\zeta_2)(\frac{1}{2})^3$$

$$(\zeta_2 \in (\frac{1}{2}, 1))$$

下式减上式 ，得

$$1 = \frac{1}{48}[\ f'''(\zeta_2) - f'''(\zeta_1)\ ] \le \frac{1}{48}[\ |f'''(\zeta_2)| + |f'''(\zeta_1)|\ ]$$

令 $|f'''(\xi)| = \max\,(|f'''(\zeta_2)|, |f'''(\zeta_1)|)$

$$\le \frac{1}{24}|f'''(\xi)| \quad (0 < \xi < 1)$$

$$\Longrightarrow |f'''(\xi)| \ge 24$$