第 3 章　　第二次习题课

一、内容与要求

1、掌握判断函数 $f(x)$ 的单调性与曲线凹凸性的方法，会求曲线的拐点，并会用单调性与凹凸性证明不等式，以及判别根的范围与个数。

2、掌握求函数 $f(x)$ 的极值与最值的方法，掌握解决最值的应用题的方法，会用最值 证明不等式。

3、 会求曲线的渐近线，会作出函数的图形。

一、利用导数讨论函数的性质及曲线的性态

1、证明函数的单调性、求函数的单调区间

(1) 证明：$f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加。

证明：$f'(x)=(1+\dfrac{1}{x})^{x}[\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{1}{1+x}]$

$$g(x)=\ln(1+\frac{1}{x})=\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}$$

$$\xi\in(x,1+x)\qquad\Rightarrow f'(x)>0,$$

$\therefore f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加。

2、求函数的极值、最值，判别是否取得极值

方法：(1) 用定义 (2) 第一充分条件 (3) 第二充分条件

例1、设$f(x)$为连续函数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=2$，则$f'(0)=$ __0__ 在$x=0$处取得极______值。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2\Rightarrow f(0)=0$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=2\Rightarrow f'(0)=0$

再根据 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}=2>0$

$f(x)$在$x=0$处取得极小值。

例2 设$f(x)$有二阶连续导数，$f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则下列正确的是(B)

(A) $f(0)$不是$f(x)$的极值，$(0, f(0))$不是拐点

(B) $f(0)$是$f(x)$的极小值

(C) $f(0)$取得极大值 (D) $(0, f(0))$是拐点

解：由$f''(x)$的连续性及$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f''(x)=0=f''(0)$$

又由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$, $\Rightarrow$ 在$U(0,\delta)\, f''(x)>0$,

$\Rightarrow$ 在$U(0,\delta)\, f'(x)$单调增

$$x<0, f'(x)<f'(0)=0,\quad x>0, f'(x)>f'(0)=0,$$

$\Rightarrow f(0)$是$f(x)$的极小值

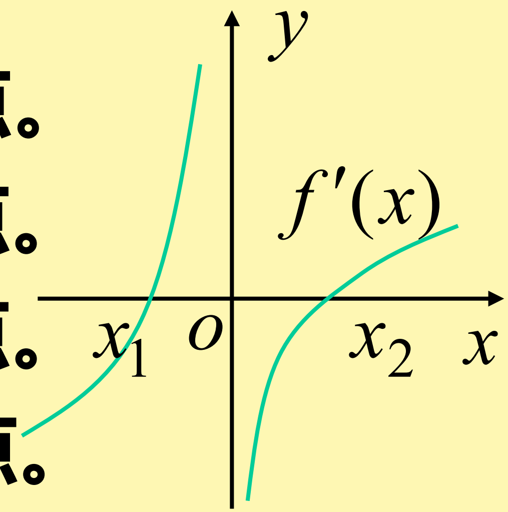
例3 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，其导函数图形如图，则$f(x)$有(B)

(A) 一个极小值点，两个极大值点。

(B) 两个极小值点，一个极大值点。

(C) 两个极小值点，两个极大值点。

(D) 三个极小值点，一个极大值点。



减区间为 $(-\infty, x_1), (0, x_2)$ ；

增区间为 $(x_1, 0), (x_2, +\infty)$ ；

小值点为 x_1, x_2 ；

大值点为 $x=0$.

例4 **设$f(x)$对一切实数x满足方程**

$$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x},$$

若$f(x)$在$a\neq 0$**处有极值，则必为极小值。**

证明　若$f(x)$在$a\neq 0$处有极值，则$f'(a)=0$.

$$f''(a)=\frac{1}{a}(1-e^{-a}).$$

当$a>0$,或$a<0$, $f''(a)>0$.

$f(x)$在a处取得极小值。

例5 $y=y(x)$由$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$确定,

求它的极值点

解 $6y^2y'-4yy'+2xy'+2y-2x=0 \quad (1)$

令$y'=0$, $\Rightarrow x=y$代入 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$

$\Rightarrow$驻点$x=1$,且$y=1$

在(1)两边在对x求导

$$12yy'^2+6y^2y''-4y'^2-4yy''+2y'+2xy''+2y'-2=0$$

将$x=1, y=1$, $y'\big|_{x=1}=0$代入

$$y''(1)=\frac{1}{2}>0$$

$x=1$是隐函数$y(x)$的极小值点。

注：此为隐函数的极值的一般方法

例 6（参数方程所表示的函数的极值） 求由参数方程

$$x=\frac{1}{4}(t+1)^2,\ y=\frac{1}{4}(t-1)^2(\text{其中}t>0)\text{所确定的}y=f(x)\text{的极值}.$$

解： 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}(t-1)}{\frac{1}{2}(t+1)}=\frac{t-1}{t+1}$$

因此, 当 $t=1$ 时, $\frac{dy}{dx}=0$, 此时 $x=1;\ y=0$

又因为 $$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\bullet\left.\frac{dt}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{4}{(t+1)^3}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}>0$$

于是 $x=1$ 是所给函数的极小值点, 极小值为 $y=0$.

3、曲线的拐点、凹凸区间、渐进线

例1 设$f(x)$二阶可导，$f'(x)>0, f''(x)<0$,则当$\Delta x>0$时有(C)

$(A)\ \Delta y > dy > 0$　　$(B)\ \Delta y < dy < 0$

$(C)\ dy > \Delta y > 0$　　$(D)\ dy < \Delta y < 0$

例2 设$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & x\le -1 \\ x^2+7x+4 & x>-1 \end{cases}$的拐点为$\underline{(-1,-2)}$

$$f''(x)=\begin{cases} 6x-2 & x<-1 \\ 2 & x>-1 \end{cases}$$

例3 曲线$y=x2^{-x}$的凸区间为$\underline{(-\infty,\frac{2}{\ln 2}]}$.

$$y''=2^{-x}\ln 2(x\ln 2-2)$$

例4 **求曲线**$x=t^2, y=3t+t^3$的拐点

解 :$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3(t^2+1)}{2t}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3(t^2-1)}{4t^3}$

当$t=\pm1$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$, 且在$t=\pm1$两侧$\dfrac{d^2y}{dx^2}$变号，所以

曲线在$t=\pm1$处存在拐点$(1,4),(1,-4)$

注：$t=0$**时，**$x=y=0$, **但因为**$x>0$, 所以$(0,0)$不是拐点.

例5 设$f(x)$有二阶连续导数，$f'(0)=0, \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}=-2,$

则下列正确的是(D)

(A) $(0, f(0))$不是拐点 (B) $f(0)$是$f(x)$的极小值

(C) $f(0)$取得极大值 (D) $(0, f(0))$是拐点

解：由$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}=-2, \Rightarrow f''(0)=0$

又$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}=-2, \Rightarrow f''(x)$在$x=0$的两边变号，

$\therefore (0, f(0))$是拐点

二 、函数不等式的证明

1 、利用单调性证明不等式

例1、当$0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$

证明：欲证的不等式

$$\Leftrightarrow \frac{\tan x_2}{x_2} > \frac{\tan x_1}{x_1}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{\tan x}{x}\text{在}(0,\frac{\pi}{2})\text{内单调增。}$$

而 $\varphi'(x) = (\dfrac{\tan x}{x})' = \dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \dfrac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

而在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内，$\sin x\cos x < \sin x < x$

$\varphi'(x) > 0, \Rightarrow \varphi(x)$单调增　　证毕。

例2.$a > b \ge e$,**证明**：$a^b < b^a$

证明：两边取对数：即证：$b\ln a < a\ln b \Leftrightarrow \dfrac{\ln b}{b} > \dfrac{\ln a}{a}$.

令：$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,**只要证明**$f(x)$在$a > b \ge e$**时**

单调递减即可。

或：固定b,令$f(x) = x\ln b - b\ln x$,只要证明

当：$x > b \ge e$时大于零。

$$f'(x) = \ln b - \frac{b}{x}, \qquad f''(x) = \frac{b}{x^2} > 0$$

$\Rightarrow f'(x)$递增,$\Rightarrow f'(x) > f'(b) = \ln b - 1 > 0$,$(x > b)$

$\Rightarrow f(x)$递增,$\Rightarrow f(x) > f(b) = 0$,

$\because a > b, \Rightarrow f(a) > f(b)$.得证。

2、利用函数的最大最小值证明不等式

例 3 证明：当 $x<1$时，$\dfrac{1}{1-x}\geq e^x$

证明：令 $f(x)=e^x(1-x)-1$

$$f'(x)=-xe^x,\qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=-(1+x)e^x,\ f''(0)=-1<0$$

$f(x)$在$x=0$处取得极大即为最大，所以

$$f(x)=e^x(1-x)-1\leq f(0)=0$$

$\Rightarrow$当$x<1$时，$\dfrac{1}{1-x}\geq e^x$

三．讨论方程实根的个数及范围。

例1 **讨论** 方程$xe^{-x}=a$**有几个实根**(a**为实常数**).

解 令$f(x)=xe^{-x}-a$ $D:(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=e^{-x}(1-x)=0,\quad \Rightarrow x=1$$

$f(x)$在$(-\infty,1]$**单调增**， 在$[1,+\infty)$**单调减**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad f(1)=\frac{1}{e}-a,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-a$$

(1).$f(1)<0$,即$a>\frac{1}{e}$,无实根。

(2).$f(1)=0$,即$a=\frac{1}{e}$,唯一实根$x=1$。

(3).$f(1)>0$,且$-a\geq 0$即$a\leq 0$,唯一实根。

(4).$f(1)>0$,且$-a<0$即$0<a<\frac{1}{e}$,两个实根。

作业中的问题

3.4 7．讨论方程 $lnx = a\,x$ （ $a > 0$ ）有几个实根。

解，则 令 $f(x) = lnx - ax$ $f'(x) = \frac{1}{x} - a$

令$f'(x) = 0$ 得$x = \frac{1}{a}$

当$0 < x < \frac{1}{a}$时， $f'(x) > 0, \Rightarrow f(x)$增

当$x > \frac{1}{a}$时， $f'(x) < 0, f(x)$减。

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

(1)若$f(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1 < 0$ 即$a > \frac{1}{e}$**时**，方程无实根；

(2)若$f(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1 = 0$ 即$a = \frac{1}{e}$,方程有一个实根 $x = e$

(3)若$f(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1 > 0$ 即$a < \frac{1}{e}$，方程有两个实根。