不定积分习题课

一、内容与要求

1、理解原函数、不定积分的概念及性质

2、熟悉不定积分的基本公式 (包括补充公式)

3、掌握不定积分的两类换元法

4、掌握分部积分法

5、会综合运用各种积分方法计算积分

6 、掌握三类特殊类型的函数的积分

二、典型例题

例 1 、选择与填空

1. $\int f(x)dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$，则 $f'(x)=$ $\underline{-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}$

解 $F(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x)=(x+\sqrt{1+x^2})''=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

2. 设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则它的一个原函数为 (B)

(A) $x+\sin x$ (B) $x-\sin x$

(C) $x+\cos x$ (D) $x-\cos x$

解 $\because f'(x)=\sin x,\quad f(x)=-\cos x+C_1$

$F(x)=-\sin x+C_1x+C_2$ 可令 $C_1=1,\ C_2=0$ 选 B

例 2、 设$f'(\ln x)=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ x & x>1\end{cases}$，求$f(x)$.

解 设 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，原式变形为$f'(t)=\begin{cases}1, & t\le 0\\ e^t, & t>0\end{cases}$

当 $t\le 0$ 时，$f(t)=\int f'(t)dt=\int dt=t+C_1$

当 $t>0$ 时，$f(t)=\int f'(t)dt=\int e^t dt=e^t+C_2$

由于$f'(t)$处处存在，故 $f(t)$ 处处连续，于是有

根据 $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)\Rightarrow C_1=1+C_2$ 令 $C_2=C$

所以$f(t)=\begin{cases}t+1+C, & t\le 0\\ e^t+C, & t>0\end{cases}$ 即$f(x)=\begin{cases}x+1+C, & x\le 0\\ e^x+C, & x>0\end{cases}$

注：此为求分段函数的不定积分的一般方法.

例 3 、(总习题 4.5 第 6 题)

设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 求 $\int xf''(x)dx$

解 $\int xf''(x)dx = \int xdf'(x) = xf'(x) - \int f'(x)dx,$

$$= xf'(x) - f(x) + C$$

$$\because f(x) = (\ln(1+\sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$\therefore \int xf''(x)dx = -\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

例 4、计算 $I=\int \frac{\sin x+2\cos x}{3\sin x-5\cos x}dx,$

解

$$\sin x+2\cos x = A(3\sin x-5\cos x)+B(5\sin x+3\cos x)$$

$$=(3A+5B)\sin x+(-5A+3B)\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A+5B=1 \\ -5A+3B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-7}{34} \\ B=\dfrac{11}{34} \end{cases}$$

$$\text{原积分}=-\frac{7}{34}x+\frac{11}{34}\ln\left|3\sin x-5\cos x\right|+C$$

例 5、计算下列不定积分

1. $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx$

解 原积分 $= \frac{1}{2}\int \frac{d\sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan\sin^2 x + C$

2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}} dx$

解 原积分 $= \frac{1}{b^2-a^2}\int \frac{d(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}}$

$$= \frac{2}{b^2-a^2}\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + C$$

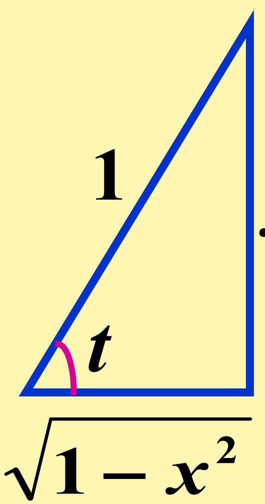
$\because (a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)' = (b^2-a^2)\sin 2x$

$3.\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$

解　原积分 $\underline{\underline{x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}}\int t\cos^2 t dt$

$= \int t\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$= \frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{1}{8}\cos 2t + C$



$= \frac{(\arcsin x)^2}{4}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{8}(1-2x^2)+C$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 总习题 4.5 3(6)

解法一 原积分 $\underline{\underline{x=\sec t(x>1)}}$ $\int dt$

$$= t + C = \arccos\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \underline{\underline{x=-t(x<-1)}} \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt$$

$$= \arccos\frac{1}{t} + C = \arccos\frac{1}{-x} + C$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos\frac{1}{|x|} + C$$

解法二 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{\sqrt{x^2-1}=t} \int \frac{1}{t^2+1}dt$

$= \arctan\sqrt{x^2-1} + C$

解法三 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\frac{1}{t}} -\operatorname{sgn} t \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$= -\operatorname{sgn} t \cdot \arcsin t + C$

$= -\operatorname{sgn} x \cdot \arcsin\frac{1}{x} + C$

$= -\arcsin\frac{1}{|x|} + C$

$$5.\ \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

解　令 $x=\tan t \quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\text{原积分}=\int\frac{\ln\tan t}{\sec t}dt$$

$$=\int \ln\tan t\,d\sin t=\sin t\ln\tan t-\int\frac{1}{\cos t}dt$$

$$=\sin t\ln\tan t-\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

$6.\int e^x \sin^2 x dx$ 总习题 4.5 3(10)

解 原积分 $= \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx$

$$\int e^x \cos 2x dx = \int \cos 2x de^x$$

$$= e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2\int \sin 2x de^x$$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x dx$$

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5}(e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x) + C$$

$$\therefore \int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{10}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C$$

$$7.\ \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$$

解 原积分 $= \int \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}}dx + \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$= \int x d\tan\frac{x}{2} + \int \tan\frac{x}{2}dx = x\tan\frac{x}{2} + C$$

$$8.\ \int \frac{\cot x}{1+\sin x}dx$$

解 原积分 $= \int \frac{d\sin x}{\sin x(1+\sin x)} = \int (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1+\sin x})d\sin x$

$$= \ln|\sin x| - \ln|1+\sin x| + C$$

$$9.\ \int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

解 原积分 $=\int xe^{\sin x}d\sin x+\int e^{\sin x}\frac{d\cos x}{\cos^2 x}$

$$=\int xde^{\sin x}-\int e^{\sin x}d\frac{1}{\cos x}$$

$$=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}$$

$$+\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^{\sin x}\cdot\cos xdx$$

$$=xe^{\sin x}-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+C$$

$$(10)\ \int \frac{x^{11}}{(x^8+1)^2}dx$$ 总习题 4.5　3(13)

解　原积分 $= \dfrac{1}{8}\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^8+1)^2}dx^8$

$$= -\frac{1}{8}\int x^4 d\frac{1}{x^8+1}$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{x^4}{1+x^8} + \frac{1}{8}\int \frac{1}{1+x^8}dx^4$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{x^4}{1+x^8} + \frac{1}{8}\arctan x^4 + C$$

11. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$

解 原积分 $\displaystyle= \int \frac{(e^{2x}+1)de^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}$

$$\underline{\underline{\text{令}e^{x}=t}}\int \frac{t^{2}+1}{t^{4}-t^{2}+1}dt$$

$$=\int \frac{1+\frac{1}{t^{2}}}{t^{2}-1+\frac{1}{t^{2}}}dt=\int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^{2}+1}$$

$$=\arctan(t-\frac{1}{t})+C=\arctan(e^{x}-\frac{1}{e^{x}})+C$$

$$12. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

总习题 4.5　3(15)

解　原积分 $= \frac{1}{2}\int (\frac{2\sin x \cos x + 1}{\sin x + \cos x} - \frac{1}{\sin x + \cos x}) dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin x + \cos x) dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\csc(x + \frac{\pi}{4}) - \cot(x + \frac{\pi}{4})| + C$$

13. $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$ 总习题 4.5 3(17)

解 原积分 $= \int \frac{\arctan x}{x^2}dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$$= -\int \arctan x d\frac{1}{x} - \int \arctan x d \arctan x$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})dx - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$14.\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$$

解 $\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = (x+2)^2\sqrt[4]{(\frac{x-1}{x+2})^3}$

令$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} = u$，两边微分：$\frac{1}{4}(\frac{x-1}{x+2})^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{(x+2)^2}dx = du$

即$dx = \frac{4}{3}\cdot(\frac{x-1}{x+2})^{\frac{3}{4}}\cdot(x+2)^2 du$

$$原式 = \int \frac{\frac{4}{3}\cdot(x+2)^2\sqrt[4]{(\frac{x-1}{x+2})^3}du}{(x+2)^2\sqrt[4]{(\frac{x-1}{x+2})^3}} = \int \frac{4}{3}du = \frac{4}{3}u + C$$

$$= \frac{4}{3}(\frac{x-1}{x+2})^{\frac{1}{4}} + C$$

或$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = (x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$

此时可令 $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} = u, \cdots$