习题课

一．内容与要求

1．理解导数的概念：

(1). 导数的定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(2). 可导与连续的关系：可导一定连续，反之不成立

(3): 导数的几何意义与物理意义.

2. 熟练掌握导数的计算：

1) 熟记导数基本公式以及导数的四则运算法则，复合函数、反函数的求导法则。

2) 熟练掌握初等函数（复合函数）、隐含数、由参数方程确定的函数的一阶，二阶导数的计算。

3) 会用对数求导法求幂指函数及因子较多的一些函数的导数。

4) 掌握一些函数的 n 阶导数的计算

3. 微分的概念：

1) 理解微分的概念及几何意义，熟练掌握微分的计算

二． 例题分析与练习

1、利用导数的定义

(1) 与极限有关的问题

例 1 设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线的斜率为 $\underline{\ -2\ }$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1 \quad \Rightarrow k=f'(1)=-2$$

例 2 设$f(x)$在$x=a$处可导，且$f(a)>0$, 求 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$

解

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)\frac{1}{n}} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

$$原极限 = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

例 3 若$f(1)=0$, $f'(1)$存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos x)=1$ 且$f(1)=0$

联想到凑导数的定义式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f'(1)$$

(2) 求分段函数在分段点 (绝对值函数）的导数

例 4

设$f(x)=\begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}(n\in N)$,当(1)$n$______时，$f(x)$在$x=0$连续，(2)当$n$______时，$f(x)$在$x=0$可导，(3)当$n$______时，$f(x)$在$x=0$有连续的导函数

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^n \sin\dfrac{1}{x}=f(0)=0, \quad \Rightarrow n>0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n\sin\dfrac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0} x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 存在， $\Rightarrow n>1$, 且$f'(0)=0$

$$(3)\, f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0$$

$$\Rightarrow n>2$$

例5 设$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数为______.

解 $f(x)=(x-2)(x+1)|x(x+1)(x-1)|$

可能不可导点：$x=0,1,-1$

当$x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(x+1)|x||(x^2-1)|}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-2)(x+1)|x||(x^2-1)|}{x}=-2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(x-2)(x+1)|x||(x^2-1)|}{x}=2$$

$x=0$不可导点

当$x=1$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x+1)|x-1||(x^2+x)|}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x+1)|x-1||(x^2+x)|}{x-1}$不存在，$x=1$**不可导点**

当$x=-1$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-2)(x+1)|x+1||(x^2-x)|}{x+1}=0$ $x=-1$**可导点**

注：$f(x)=g(x)|x-a|$, $g(x)$在$x=a$**处连续，则**

(1) 若$g(a)=0$,**则**$f(x)=g(x)|x-a|$在$x=a$**处可导。**

(2) 若$g(a)\neq0$,**则**$f(x)=g(x)|x-a|$在$x=a$**处不可导。**

例6 设$f(x)=\begin{cases} e^x & x\ge 0 \\ ax^2+bx+c & x<0 \end{cases}$,问$a,b,c$为何值时$f(x)$在$x=0$处具有二阶导数

解 $\because e^x, ax^2+bx+c$处处均连续且有各阶导数

$\therefore$要使$f(x)$在$x=0$处有二阶导数,必须且只需

$$\begin{cases} f(0+0)=f(0-0) & (f(x)\text{在}x=0\text{处连续}) \\ f'(0+0)=f'(0-0) & (f'(x)\text{在}x=0\text{处连续}) \\ f''_+(0)=f''_-(0) & (f(x)\text{在}x=0\text{处二阶可导}) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x\ge 0 \\ ax^2+bx+c & x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(0+0)=f(0-0) \\ f'(0+0)=f'(0-0) \\ f''_+(0)=f''_-(0) \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = \lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+bx+c) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = \lim\limits_{x\to 0^-}(2ax+b) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2ax+b-b}{x} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} 1=c \\ 1=b \\ 1=2a \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $a=\dfrac{1}{2}, b=1, c=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数.

(3). 其它一些有关证明

例7 设$f(x)$在整个实数轴上有定义，对任意的x, y 有$f(x+y)=f(x)f(y)$，且$f'(0)=1$，证明：当 $x\in(-\infty,+\infty)$有$f'(x)=f(x)$.

证明 因为对任何 x,y 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，取 $y=0$，则 $f(x)=f(x)f(0)$，推出 $f(0)=1$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\left[f(\Delta x)-1\right]}{\Delta x}$$

$$=f(x)f'(0)=f(x).$$

2. 选择与填空

(1). $\dfrac{d}{dx}[f(\dfrac{1}{x^2})]=\dfrac{1}{x}$,则$f'(\dfrac{1}{2})=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

解: (1). $\because\ f'(t)=-\dfrac{1}{2t},\Rightarrow\ f'(\dfrac{1}{2})=-1.$

(2). $\varphi(x)$是单调连续函数$f(x)$的反函数，且$f(1)=2$,

若$f'(1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,则$\varphi'(2)=$ $\underline{\quad -\sqrt{3} \quad}$.

(3). 设$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0.3\Delta x+\ln^2(1+\Delta x)$,则 $\underline{\quad A \quad}$

(A) $f(x)$在x_0可微，$dy=0.3\Delta x$. (B) 不可微

(C) $f(x)$在x_0可微, $dy\neq 0.3\Delta x$.

3. 求下列函数的导数.

(1) $y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$,

(2). 设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''(0)$.

(3). $y=\sqrt[x]{x}+\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}$, $(x>0)$求y'.

(4). $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$, 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(5). $y=\arctan\dfrac{2x}{1+x^2}$, 求$dy$.

(6)试从$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$中导出：$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$

(1) $y=\sin^2(\frac{1-\ln x}{x})$, $\quad y'=\frac{\ln x-2}{x^2}\cdot\sin\frac{2(1-\ln x)}{x}$.

(2). **设函数**$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''(0)$.

解：$e^y y'+y+xy'=0$,. (1)

$$e^y(y')^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0 \qquad (2)$$

将$x=0, y=1$代入(1)，得$y'(0)=-\frac{1}{e}$

将$x=0, y=1$ $y'(0)=-\frac{1}{e}$代入(2)得$y''(0)=\frac{1}{e^2}$

(3). $y=\sqrt[x]{x}+\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}$, 求$y'$.

解：令 $y_1=\sqrt[x]{x}$, $y_2=\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}$, 求$y'$.

$$\ln y_1=\frac{1}{x}\ln x,\quad \ln y_2=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x+\frac{1}{4}\ln(e^x-1).$$

$$\frac{y_1'}{y_1}=\frac{1-\ln x}{x^2}\qquad\Rightarrow y_1'=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\frac{y_2'}{y_2}=\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{2\sin x}+\frac{e^x}{4(e^x-1)}.$$

$$y_2'=\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x=1}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x+\frac{e^x}{4(e^x-1)}.\right)$$

$$\Rightarrow y'=y_1'+y_2'=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$+\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x+\frac{e^x}{4(e^x-1)}.\right)$$

(4). $\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{1}{2}\dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{t} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

(5). $dy = \dfrac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4}dx.$

(6) **试从** $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ **中导出：** $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$

解法一 $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$

$$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

解法二 利用微分 $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dy}$

$$=\frac{-\frac{y''}{(y')^2}dx}{y'dx}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

4. 求下列函数的 n 阶导数 .

方法 1　化简函数，利用已知的 n 阶导数公式

例 1　设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$.

解

$$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}$$

$$=4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\therefore\ y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

方法 2　利用莱布尼兹公式

例 2　$f(x)=x^2\sin 2x$, 求 $f^{(50)}(x)$

解　$(x^2\sin 2x)^{(50)}=x^2 2^{50}\sin(2x+50\dfrac{\pi}{2})$

$$+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cdot\sin\left(2x+49\frac{\pi}{2}\right)+\frac{50\times 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{48}\sin(2x+48\frac{\pi}{2})$$

$$=-x^2 2^{50}\sin 2x+50\cdot x\cdot 2^{50}\cos 2x+\frac{50\times 49}{2}\cdot 2^{49}\sin 2x$$

$$=2^{49}(-2x^2\sin 2x+100x\cos 2x+1225\sin 2x)$$

方法3 利用微分方程，建立递推公式

例2 $y = \arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$

解 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$，$y'(0) = 1$

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad y''(0) = 0$$

再往下求很复杂。

$$(1+x^2)y' = 1 \qquad (1)$$

(1) 式两端对 x 求 n 阶导数 (也可求 n-1 阶导数),

依莱布尼兹公式有

$$y^{(n+1)}(1+x^2) + ny^{(n)} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} y^{(n-1)} \cdot 2 = 0 \qquad (2)$$

（2）式中令 $x=0$ 得

$$y^{(n+1)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0 \quad (3)$$

(3) 式中给出了 $y^{(n+1)}(0)$ 与 $y^{(n-1)}(0)$ 之间的递推公式

$$y''(0)=0 \Rightarrow y^{(2k)}(0)=0 \quad (k\text{为自然数})$$

由 $y'(0)=1 \Rightarrow y'''(0)=-2\cdot 1\cdot 1=-2!$

$$y^{(5)}(0)=-4\cdot 3\cdot y'''(0)=4!$$

$$y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & n=2k \\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1 \end{cases} \quad k=0,1,2,\cdots$$