习题课

一．内容与要求

1. 理解函数、复合函数、反函数、初等函数的概念，

了解函数的特性，熟悉基本初等函数的图形与特性。

会求函数（复合）的定义域与表达式。

2. 理解极限概念，会用分析定义叙述数列极限、函数极限、无穷大量、无穷小量。并能作一些简单证明。

3. 了解无穷小、极限的性质和运算法则，会求极限。

4. 了解极限的两个存在的准则并会应用

5. 会用两个重要极限求极限

6．掌握无穷小的比较与无穷小阶的估计，会利用等价无穷小替换求极限。

7．理解函数在一点连续的概念，会判断间断点的类型

8． 了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质

知识要点：1. 两个重要极限（一般形式）

$1^0\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\qquad 2^0\ \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$

2. 我们把已遇到的等价无穷小列出来：

$x\to 0,$

$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x$

$\arctan x\sim x,$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\qquad \sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,$

$\ln(1+x)\sim x,\qquad e^x-1\sim x,\quad \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.\ (n\in N^+)\ a^x-1\sim x\ln a(a>0,\neq 1)$

3.若：$u(x)\to 1, v(x)\to\infty, (1^{\infty})$

$$\because \lim u(x)^{v(x)} = \lim\left[(1+u(x)-1)^{\frac{1}{u(x)-1}}\right]^{[u(x)-1]v(x)}$$

$$\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$

$$=\begin{cases} e^{A} & \lim v(x)[u(x)-1] = A(\text{常数}), \\ +\infty & \lim v(x)[u(x)-1] = +\infty, \\ 0 & \qquad\qquad\qquad\quad = -\infty. \end{cases}$$

4. 求极限，常用方法如下

:(1). 用定义证明 .

(2). 利用运算性质 (无穷小运算性质，四则运算、复合函数的极限运算法则）

(3) 对于数列的极限利用数列的求和公式 , 拆项、添项等方法来求极限。

(4) 利用两个极限存在准则

(5) 利用函数的连续性

(6) 利用两个重要极限

(7) 利用等价无穷小代换

(8) 利用变量代换

(9) 利用左、右极限求极限。

5. 间段点的判别方法:

$$
\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{array}\right\}\text{第一类间断点}\left(\begin{array}{l} f(x_0-0),f(x_0+0)\text{存在且相等}\\ f(x_0-0),f(x_0+0)\text{存在但不等}\end{array}\right)\\
\left.\begin{array}{l}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{array}\right\}\text{第二类间断点}\left(\begin{array}{l} f_-(x_0).f_+(x_0)\text{至少有一为}\infty\\ \quad\text{其它}\end{array}\right)
\end{cases}
$$

6. 判断极限不存在的方法:

(1). 子列（数列). (2). 左、右极限 .(3). 函数的子列 .

二. 典型例题

1. 求极限

$$(1).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$$

$$(2).\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x\geq 0)$$

$$(1).\text{求}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$$

解. $$\because \frac{1}{\sqrt{n^6+n^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n^6+kn}} \le \frac{1}{\sqrt{n^6+n}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}$$

$$\because \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}} = \frac{1}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}$$

由夹逼准则,原式$=\frac{1}{3}$.

(2)．求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\ (x\geq 0)$

解

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\max\{1,\ x,\frac{x^2}{2}\}$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1\\ x, & 1<x\leq 2\\ \frac{x^2}{2}, & x>2\end{cases}$$

2. (1)设$x_0=1,\ x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}, n=0,1,2,\cdots$

试证$\{x_n\}$收敛, 并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证. $x_1=\dfrac{4}{3}>x_0$ 设$x_n>x_{n-1}$

则$$x_{n+1}-x_n=(2-\frac{2}{2+x_n})-(2-\frac{2}{2+x_{n-1}})$$

$$=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}>0 \quad \Rightarrow \{x_n\}\text{单调增};$$

又$0<x_{n+1}=2-\dfrac{2}{2+x_n}<2, (n=0,1,\cdots)\therefore\{x_n\}$有界.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$且$A\geq 0$ $\quad\therefore A=\dfrac{2+2A}{2+A}\quad A=\pm\sqrt{2}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}.$$

(2) 设$a>0,\ a_1>0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n}),\ n=0,1,2,\cdots$

试证$\{a_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})\geq\sqrt{a}\ \Rightarrow\{a_n\}$有下界

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{a_n^{\ 2}})\leq 1\qquad(a_n^{\ 2}\geq a)$$

$\Rightarrow\{a_n\}$单调减少

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,则$A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})$

求得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$

3. 求极限

$$(1).\ \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\quad (a\neq n\pi)$$

$$(2).\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}\quad (a>0,b>0,c>0)$$

$$(3).\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$$

$$(1).\ \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\ (a\neq n\pi)$$

解：属 1^{∞} 型极限问题

原式

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}}$$

$$=e^{\cot a}$$

$$(2).\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$$

解：属 1^{∞} 型极限问题

$$\lim_{x\to 0} v(u-1)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{a^{x+1}-a+b^{x+1}-b+c^{x+1}-c}{a+b+c}\right]$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\left[\frac{a(a^{x}-1)}{x}+\frac{b(b^{x}-1)}{x}+\frac{c(c^{x}-1)}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{a+b+c}(a\ln a + b\ln b + c\ln c)$$

$$= \frac{\ln(a^a b^b c^c)}{a+b+c}$$

原式 $= e^{\frac{\ln(a^a b^b c^c)}{a+b+c}} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$

(3). $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x(\sin x - 1)}$

$$\underline{\underline{令 x - \frac{\pi}{2} = t}} \quad e^{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\cos t}{-\sin t}(\cos t - 1)} = e^{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\cos t}{-t}(-\frac{t^2}{2})}$$

$$= e^0 = 1$$

4．求下列极限

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin^2 x)-x}{\ln(e^{2x}+x^2)-2x};$$

(3) $$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}\quad (m.n\in N)$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos\beta x}{\ln\cos\alpha x}\qquad (\alpha,\beta\neq 0)$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right).$$

解. (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin^2 x\cdot 2\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x^2}=\frac{1}{2}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin^2 x)-x}{\ln(e^{2x}+x^2)-2x};$$

解 $:\ln(e^x+\sin^2 x)=\ln[e^x(1+\frac{\sin^2 x}{e^x})]$

$$=x+\ln(1+\frac{\sin^2 x}{e^x})$$

$$\ln(e^{2x}+x^2)=2x+\ln(1+x^2e^{-2x})$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+e^{-x}\sin^2 x)-x}{2x+\ln(1+e^{-2x}x^2)-2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin^2 x}{e^{-2x}x^2}=1$$

$$(3)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}\quad(m.n\in N^{+})$$

解 $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} \xlongequal{\text{令}x-\pi=t} \lim_{t\to0}\frac{\sin m(\pi+t)}{\sin n(\pi+t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(-1)^{m}\sin mt}{(-1)^{n}\sin nt}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(-1)^{m}mt}{(-1)^{n}nt}=\frac{(-1)^{m-n}m}{n}$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos\beta x}{\ln\cos\alpha x}\qquad(\alpha,\beta\neq 0)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos\beta x-1)}{\ln(1+\cos\alpha x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\beta x-1}{\cos\alpha x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\beta x)^2}{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}\quad=\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

(5). 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

注意此项含绝对值

解：

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$\Longrightarrow$ 原式 $=1$

5.(1).求$x \to 1^+$时，$f(x)=\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$

是$x-1$的几阶无穷小?

(2)$x \to 0$时$f(x)=e^{x^2}-\cos x$是x的几阶无穷小?

解 (1). $\because\ f(x)=\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\ln[1+(x-1)]$

$$\therefore \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{(x-1)^{3/2}}=2$$

$\therefore$ 当$x \to 1$时，$f(x)$是$x-1$的$\dfrac{3}{2}$阶无穷小.

(2) $f(x)=e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}$$

即$f(x)=e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x$

$$\sim x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2$$

$\therefore x\to 0$时$f(x)=e^{x^2}-\cos x$是x的2阶无穷小?

注：若$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$, 且$\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq 1$, 则

$$\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$$

6． 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

解：由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1)=0$

进而知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\sin 2x=0$

于是有 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3}=2$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=6$

7.(1)求函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}, & x<0\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geq 0\end{cases}$的间断点,

并指出其类型.

解. 当$x<0$时, $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}$,由$\sin \pi x=0$,

得$x=-1,-2,-3,\cdots$

当$x\geq 0$时, $f(x)=\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}$,

由$x^2-1=0$得$x=1$

又$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}=-\dfrac{1}{\pi}$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sin(-1)$

$\therefore x = 0, 1, -1, -2, \cdots$ 为 $f(x)$ 的间断点.

其中 $x=0$ 为跳跃间断点，

$x = 1$ ($\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在) 为振荡间断点

$x = -1$

令 $x = y - 1$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(y-1)^3 - (y-1)}{-\sin \pi y}$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y(y-1)(y-2)}{-\pi y} = -\frac{2}{\pi}$$

$\therefore x = -1$ 为可去间断点.

$x = -2, -3, \ldots\ldots$ 为无穷间断点 .

（2） 1.10 1(9).设$f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$,讨论间断点及类型

解　间断点：$x=1, 1-e^{\frac{x}{x-1}}=0 \Rightarrow x=0.$

$$x=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-\frac{x}{1-x}}=-1,$$

$\therefore x=0$为可去间断点。

$$x=1, \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1, \left(\frac{x}{1-x}\to-\infty, e^{\frac{x}{1-x}}\to 0\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0, \left(\frac{x}{1-x}\to+\infty, e^{\frac{x}{1-x}}\to+\infty\right).$$

$x=1$为跳跃间段点。

(3)讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|<1\end{cases}$

$x=\pm 1$为跳跃间断点

8.设$f(x)\in C_{[a,b]}$，且$a<x_1<x_2\cdots<x_n<b$，证明：

$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$.

证. $\because f(x)\in C_{[a,b]}$,

$$\therefore \exists M=\max_{x\in[x_1,x_n]} f(x),\quad m=\min_{x\in[x_1,x_n]} f(x)$$

$$\therefore m\le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$$

若$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}=m$或$M$，则结论成立

若$m<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}<M$，则根据介值定理

$\exists\xi\in(x_1,x_n)$，使$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$.

9.**设**$f(x)\in C(-\infty,\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, **证明**: $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界

证明: $\because \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, 设$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则由极限的性质知

对$\varepsilon_0=1$, $\exists X>0$, 当$|x|>X$, $|f(x)-A|<\varepsilon_0=1$

$\Rightarrow |f(x)|<|A|+1$

又 $\because f(x)$在$[-X,X]$上连续, $\exists M_1$, 使得$|f(x)|\le M_1$

取$M=\max(M_1,|A|+1)$, 则对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $|f(x)|\le M$