定积分习题课

一、内容及要求

1．理解定积分的概念、几何意义、性质。

2．理解变限积分函数的概念，熟练掌握牛顿——莱布尼兹公式

3．熟练掌握定积分的换元与分部积分法

4. 熟悉如下的一些结论：（均假设 $f(x)$ 连续）

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，则：

对任何实数 a，有 $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

(3) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3}, & n\text{为大于 1 的正奇数} \end{cases}$$

5 . 熟练掌握两类反常积分的定义和计算

6 . 熟练掌握定积分的几何应用和物理应用

二、典型例题

1. 利用定积分的定义、几何意义、性质 .

例 1 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})^2=\int_0^1\ln(1+x)^2dx$

$$=2\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$$

注：如何计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ ？

$$=e^{2\ln 2-1}$$

例 2 设$f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx$，求$f(x)$。

解：令$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = c$ 则$f(x)=x-c$

$$f(x)\sin x = x\sin x - c\sin x$$

$$c=\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx=\int_0^{\pi} x\sin x dx - c\int_0^{\pi}\sin x dx$$

$$c=\pi-2c \quad \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx=\frac{\pi}{3} \quad 则 f(x)=x-\frac{\pi}{3}$$

例 3 设$f(x)$二阶可导，且$f(x)>0$，下列不等式

$$f(b)(b-a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

成立的条件是 $\underline{\quad B \quad}$

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$. (B) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

(C) $f'(x)>0, f''(x)>0$. (D) $f'(x)>0, f''(x)<0$.

例 4 比较下列积分的大小，设$f(x)$在[0,1]上连续，非负且不恒为零，记$I=\int_0^1 f(x)dx,\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx,$ $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx.$

解：$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \overset{t=\sin x}{=\!=\!=} \int_0^1 f(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$>\int_0^1 f(x)dx=I$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx \overset{t=\tan x}{=\!=\!=} \int_0^1 f(t)\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$<\int_0^1 f(x)dx=I$$

$$\therefore K<I<J.$$

2. 变限积分函数及其应用

(一). 求变限积分函数的导数

例 1 **设$f(x)$为连续函数，则**$\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt =$ <u>$xf(x^2)$</u>

解 $\int_0^x tf(x^2-t^2)dt \xlongequal{x^2-t^2=u} \int_{x^2}^0 tf(u)(-\dfrac{du}{2t})$

$= \int_0^{x^2} \dfrac{1}{2} f(u)du$

(二). 与变限积分有关的极限无穷小问题

含有变限积分函数的$\dfrac{0}{0}$型极限采用洛必达法则

例 2 求下列极限

$$(1).\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{1}=2$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt]du}{x(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt]du}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)dt}{3x^2}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{2x}$$

$$=\frac{2}{3}\arctan 1=\frac{\pi}{6}.$$

(三). 求分段函数的变限积分

例 3 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<-1 \\ \frac{1}{2}(1-x), & -1\le x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$ 求$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

解: 当$x<-1$

$$F(x)=\int_0^{-1}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_{-1}^{x}1dt=x+\frac{1}{4}$$

当$-1\le x<1$

$$F(x)=\int_0^{x}\frac{1}{2}(1-t)dt=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$$

当$x>1$

$$F(x)=\int_0^{1}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_{1}^{x}(t-1)dt=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4}$$

(四). 讨论变限积分函数的性质

例 4 (1)若$f(x)$连续，则下列函数中必为偶函数的是 $\underline{\ D\ }$

$(A)\int_0^x f(t^2)dt$ $\qquad (B)\int_0^x f^2(t)dt$

$(C)\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$ $\qquad (D)\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

解：若$f(x)$为奇函数，则$F(x)=\int_0^x f(t)dt$为偶函数

若$f(x)$为偶函数，则$F(x)=\int_0^x f(t)dt$为奇函数

$t[f(t)+f(-t)]$为奇函数，应选D

或令$f(t)=t$，则A,B,C都不对.

(2)若$f(x)$为以2为周期的周期函数，证明：

$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$也是以2为周期的周期函数

证明：$G(x+2)=2\int_0^{x+2} f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt$

$$=2\int_0^2 f(t)dt+2\int_2^{x+2} f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$$

$$=2\int_2^{x+2} f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$$

$$\underline{\underline{t=u+2}}\quad 2\int_0^x f(u+2)du-x\int_0^2 f(t)dt$$

$$=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt=G(x)$$

例 5 求$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$的单调区间与极值

解： $$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+x^2e^{-x^4}\cdot 2x-x^2e^{-x^4}\cdot 2x$$

$$=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$$ 驻点$x=0,\pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极大	↗	极小	↘	极大	↗

3. 与定积分有关的证明题

(一). 零点问题.

例 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：方程 $\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}=0$ 在 (a,b) 内有且仅有一个根.

证明：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}$

由题设知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、可导，且有

$$F(a)=\int_b^a \frac{dt}{f(t)}<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$$

由介值定理（零点定理）知存在 $\xi\in(a,b)$,

使 $F(\xi)=0$，即：$F(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

又当 $f(x)>0$ 时，

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2,$$

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

故 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一的根。

例 2 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\exists\xi\in(a,b)$

使得 $f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)dx$

证明：令 $\varphi(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt\cdot\int_{b}^{x}g(t)dt$

$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$

利用罗尔定理 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$

即 $f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)dx$

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上可微，且有

$$f(1)=2\int_0^{1/2} e^{1-x^2} f(x)dx$$

求证：存在 $\xi\in(0，1)$，使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

证明： 令 $g(x)=e^{1-x^2} f(x)$ 则 $f(1)=2\int_0^{1/2} g(x)dx$

$g(1)=f(1)$ $\underline{\underline{积分中值定理}}$ $2g(c)(\frac{1}{2}-0)=g(c)$, $c\in[0,\frac{1}{2}]$

则 $g(x)$ 在 $[c，1]$ 上满足罗尔定理的条件

故存在 $\xi\in(c，1)\subset(0，1)$ 使 $g'(\xi)=0$,

即 $[-2xe^{1-x^2} f(x)+e^{1-x^2} f'(x)]_{x=\xi}=0$

$\because e^{1-\xi^2}\neq 0 \quad \therefore f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

(二). 积分不等式的证明

方法一、利用积分的估值、不等式性质.

例 1 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续可导，且$f(a)=0$, 证明

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\ge \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx$$

证明　设 $\max_{a\le x\le b}|f'(x)|=M$

$$\text{原不等式}\Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx\le \frac{(b-a)^2}{2}M$$

$$\because\ f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\quad a<\xi<b$$

$$\because |f(x)|\le|f'(\xi)|(x-a)\le M(x-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx\le M\int_a^b (x-a)dx = M\frac{(b-a)^2}{2}$$

例 2 证明$f(x)=\int_0^x(1-t)\ln(1+nt)dt$在$(0,+\infty)$上的最大值不超过$\dfrac{n}{6}$

证明 先求最大值

$f'(x)=(1-x)\ln(1+nx)=0\Rightarrow x=1$(唯一驻点)

$x>1, f'(x)<0, x<1, f'(x)>0$

$x=1$为极大值点也为最大值点

最大值$f(1)=\int_0^1(1-t)\ln(1+nt)dt$

$$\le\int_0^1(1-t)nt\,dt=\frac{n}{6}$$

方法二：构造变上限函数，利用微分学的知识证明不等式是证明积分不等式的一个很重要的方法。

例 1. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，试证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \ge (b-a)^2$$

证： 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}-(x-a)^2$

则 $F'(x)=f(x)\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}+\frac{1}{f(x)}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-2(x-a)$

$$=\int_a^x\left[\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right]\mathrm{d}t\ge 0\qquad x>a,\ f(x)>0$$

故 $F(x)$ 单调递增 $\therefore F(b)\ge F(a)=0$，即成立.

例 2.设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$,

$0<f'(x)<1$, 证明 $[\int_0^1 f(x)dx]^2 > \int_0^1 f^3(x)dx$.

证明 :令 : $F(t)=[\int_0^t f(x)dx]^2-\int_0^t f^3(x)dx$.

则: $F'(t)=f(t)[2\int_0^t f(x)dx-f^2(t)]$

令 $G(t)=2\int_0^t f(x)dx-f^2(t)$

$G'(t)=2f(t)[1-f'(t)]>0$

$\Rightarrow G(t)$ 单调增，则 $G(t)>G(0)=0$

$\Rightarrow F(t)$ 单调增，则 $F(t)>F(0)=0$

则 $F(1)>F(0)=0$

(三). 积分等式的证明

方法一、利用换元法证明积分等式 .

方法二、构造变上限函数，利用微分法证明积分等式

方法三、 利用分部积分法证明积分等式 .

例 1. **证明** $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

证明： $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=\!=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-t)f(\cos t)dt$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} f(\cos t)dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(\cos t)dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} f(\cos t)dt - 0 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

例 2 设$f''(x)$在$[a,b]$上连续，证明

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

证明：

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

$$=(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot\left[2x-(a+b)\right]dx$$

$$=-\left[2x-(a+b)\right]f(x)\Big|_a^b+2\int_a^b f(x)dx$$

$$=-(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]+2\int_a^b f(x)dx$$

所以

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

4. 有关定积分（反常积分）的计算

(一). 选择适当的方法计算 (变形、换元、分部)

例 1： 计算下列积分

$$(1)\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx \xlongequal{\sqrt{e^x-1}=t} \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt$$

$$=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$$

$$(2)\int_{-\sqrt{2}}^{-2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\arcsin t\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{2}}=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

$$(3).\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \overset{x=\tan t}{=\!=\!=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(4)\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{2}[\int_0^{\pi} x^2 dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx]$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x^2 d\sin 2x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}[x^2 \sin 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin 2x dx]$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x d\cos 2x = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}$$

⑸ 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} & 1<x<e \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x} & x\geq e\end{cases}$

若反常(**广义**)**积分**$\int_1^{+\infty} f(x)dx$**收敛，则**_____

$(A)\alpha<-2$　　$(B)\alpha>2$　　$(C)-2<\alpha<0$　　$(D)0<\alpha<2$

解：　$x=1$是瑕点

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx+\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$$

$\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx$**收敛**$\Leftrightarrow \alpha-1<1$，即$\alpha<2$

注 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx$，当$q<1$**时收敛，**$q\geq 1$**时发散。**

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln^{\alpha+1}x}d\ln x \text{收敛} \Leftrightarrow \alpha+1>1, \text{即} \alpha>0$$

注 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$, 当 $p>1$ 时收敛，$p\le 1$ 时发散. **应选(D)**

(三). 特殊形式的函数的定积分的计算

(1). 有关分段函数、绝对值函数的定积分的计算

(2). 被积函数中含有变限积分的积分

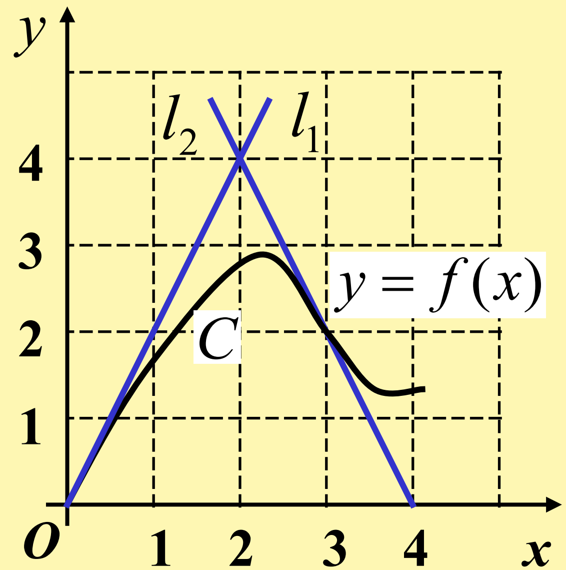
(3). 被积函数中含有抽象函数的积分

例 2: 计算下列积分

(1). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx=2(\sqrt{2}-1)$

(2). 如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$, 点$(3,2)$是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x) f'''(x)\,\mathrm{d}x$.



$f''(3)=0$

$f'(0)=2;\ f'(3)=-2$

解：$\int_0^3 (x^2+x) f'''(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \underbrace{(x^2+x) f''(x)\Big|_0^3}_{=0} - \int_0^3 (2x+1) f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -(2x+1) f'(x)\Big|_0^3 + \int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -(7\times(-2)-2) \quad + 2f(x)\Big|_0^3$$

$$= 16 + 2[f(3)-f(0)] \quad = 16+4=20$$

(3)设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}\,dy$，求 $\int_0^1 (1-x)^2 f(x)\,dx$．

解：$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,d(x-1)^3$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1}_{0}-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 \underline{f'(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}(x-1)^2 \quad (\text{令 } u=(x-1)^2)$$

$$=\frac{e}{6}\int_0^1 u e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{6}(e-2)$$

(三). 简化定积分的计算的若干方法

例 3: 计算下列积分

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx =$ ________

解： 原式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)dx$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}$$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

注：利用 $\int_{-a}^{a} f(x)dx \underline{\underline{x=-t}} \int_{-a}^{a} f(-t)dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(-x)+f(x)]dx = \int_0^{a}[f(-x)+f(x)]dx$$

例1. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线．该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 *D*.

(1) 求 *D* 的面积；

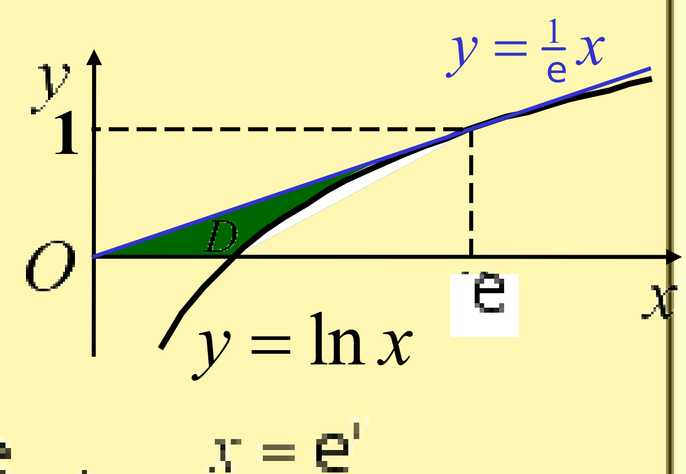
(2) 求 *D* 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积．

解：(1) 设切点的横坐标为 x_0，则所求切线方程为

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

由切线过原点知 $\ln x_0-1=0$,

因此 $x_0=\mathrm{e}$ 故切线方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$



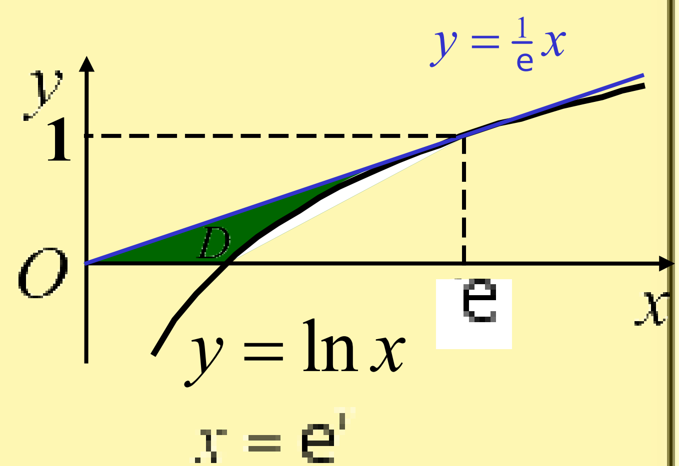
D 的面积为 $A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\,\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}}{2}-1$

(2) 切线、x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得圆锥的体积为 $V_1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2$

曲线、x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围图形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得旋转体体积为

$$V_2=\pi\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{2}(-\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-1)$$



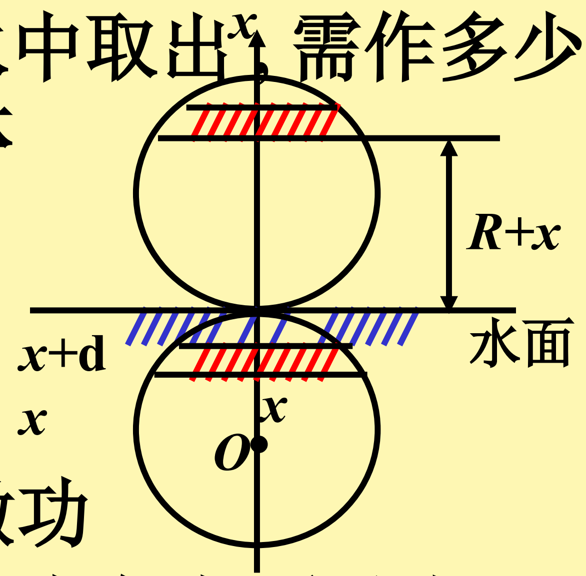
因此所求旋转体体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}[5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3]$$

体积.

例 2. 半径为 R 的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的比重与水相同，现将球从水中取出，需作多少功？

解: 建立坐标系如图所示。



相应于区间 $[x\,,\ \ x+\mathrm{d}x]$ 的球体中的薄片(球台)的体积约为

$$\mathrm{d}V = \pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

由于球的比重与水相同，

则这部分的球由 x 提升到水面不做功

当球体恰好露出水面时，这一薄片在水面以上移动的路程为 $R+x$，克服重力做功为

$$\mathrm{d}W = \rho g\pi(R^2 - x^2)(R+x)\mathrm{d}x$$

奇函数

于是 $W = \int_{-R}^{R} \rho g\pi(R^2 - x^2)(R+\underline{x})\mathrm{d}x$

$$= \rho g\pi\int_{-R}^{R} R(R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\rho g\pi R^4$$