第2章 导数与微分

- 导数的定义
- 求导法则
- 高阶导数及相关变化率
- 微分

* 微分学是微积分的重要组成部分,它的基本概念是导数和微分.

* 两个基本概念来源于两类问题:

1)研究函数在某点变化的快慢,即变化率问题;

2)研究当自变量变化少许时,函数变化了多少,即改变量问题;

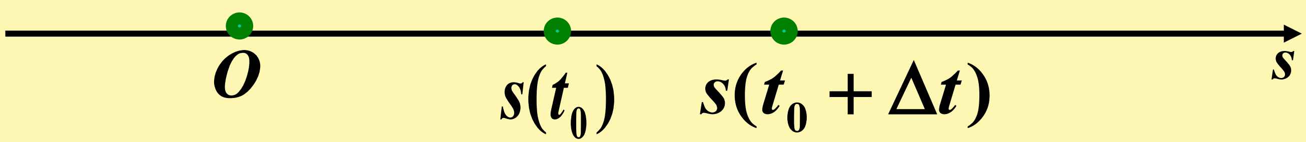
前者引出“导数”概念,后者引出“微分”概念.

* 本章基本内容: 建立导数和微分的概念,讨论函数的求导方法和微分运算方法.

2.1 导数的定义

2.1.1 引例

例1 设做直线运动的质点,它的路程规律是$s=s(t)$,则它在时刻t_0的速度$v(t_0)$是什么?



时间: $t_0 \to t_0+\Delta t$

路程: $\Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$

匀:以常代变

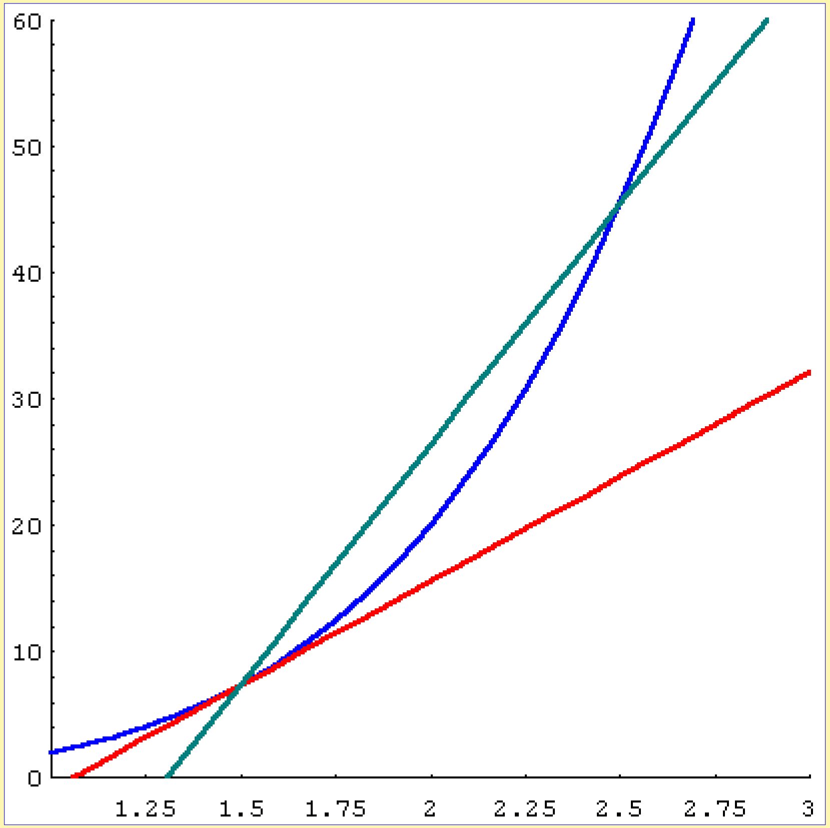
平均速度: $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} \approx v(t_0)$

精:求极限

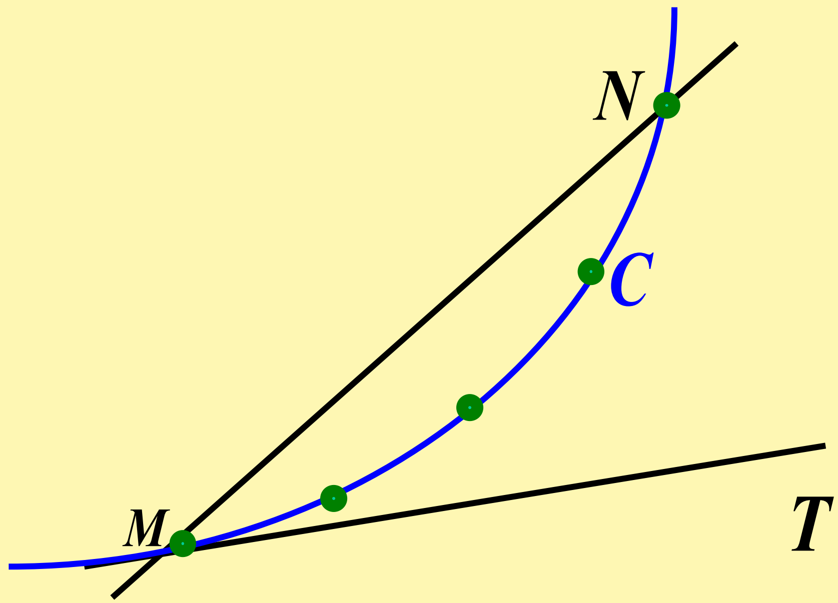
即时速度: $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

例2 求曲线的切线方程.

割线的极限位置——切线位置

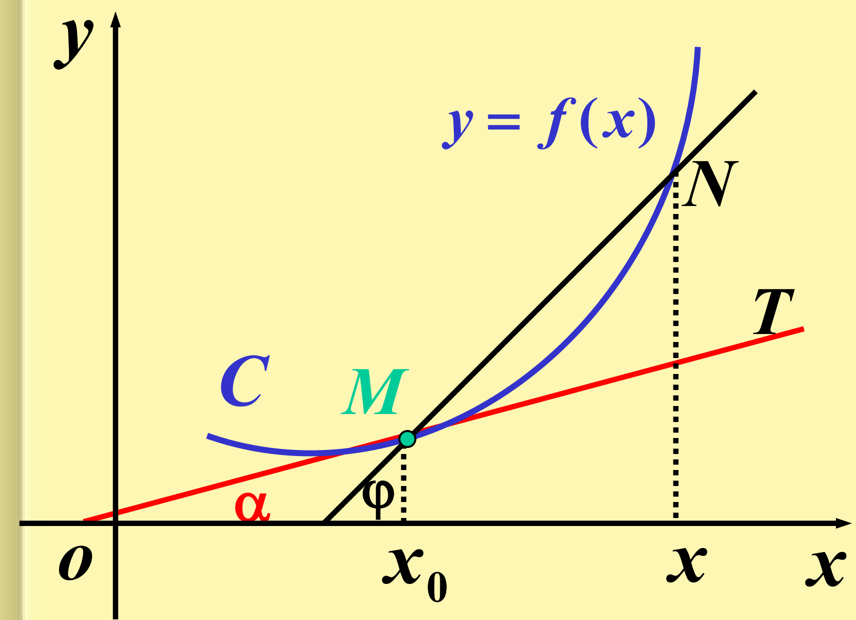


例2 求曲线的切线方程



割线的极限位置——切线位置

点N沿曲线C而趋于点M时，割线MN绕点M转动而趋于极限位置MT，直线MT就称为曲线C在点M处的切线.



匀：以常代变求近似

$$\tan\alpha \approx \tan\varphi$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0$$

精：求极限得精确值

$$N(x, y) \xrightarrow{\text{沿曲线}y=f(x)} M(x_0, y_0)$$

割线MN $\xrightarrow{\text{绕M点转动}}$ 极限位置MT

割线的斜角$\varphi \longrightarrow$ 切线的斜角α

割线的斜率$\tan\varphi \longrightarrow$ 切线的斜率$\tan\alpha$

$$\therefore k_{切} = \tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

变速直线运动的瞬时速度:

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

曲线的切线斜率:

$$k_{切}=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

两者的共性:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限

2.1.2 导数的定义

1. 函数在一点的导数

定义2.1.1 设函数 $y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；若$\Delta x\to 0$时$\Delta y$与$\Delta x$之比的极限存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并称此极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记做：$f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

说明:

1.“可导”，“导数存在”，“具有导数”意义相同;

2.导数也可记作 $y'\big|_{x=x_0},\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$

3.导数的定义是构造型的,它是函数的一种特殊形式的极限;

4.点导数是因变量在点x_0处的变化率，它反映因变量随自变量的变化而变化的快慢程度的精确描述.

5.导数的不同 表达形式:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

6. 如果极限不存在,则称函数$f(x)$在点x_0不可导.

如果导数不存在的原因是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$,

则称函数$f(x)$在点x_0的导数为无穷大.

2.单侧导数的定义

左导数: $f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

右导数: $f'_{+}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

函数在一点可导的充要条件:

$f'(x_0)$存在 $\Leftrightarrow$ $f'_{+}(x_0)$、$f'_{-}(x_0)$分别存在且相等

3. 导函数(区间导数)的定义

如果函数 $y = f(x)$在开区间I 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间I 内可导。

f'：

$$x_0 \longrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$x_1 \longrightarrow f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\vdots$$

$$x \longrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3. 导函数(区间导数)的定义

$$g(x)=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

对于任一 $x\in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值,这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数. 记作:

$$y',f'(x),\frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx}.$$

注意: 单侧导数不可记作 $f'(x_0^{+})$、$f'(x_0^{-})$,它们表示的是导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的右、左极限.

$$f'(x_0^{+})=g(x_0^{+})=\lim_{x\to x_0^{+}}g(x)=\lim_{x\to x_0^{+}}f'(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

说明:

1.对于闭区间的端点,只要求单边可导

2.在上述极限表达式中, Δx是变量,x是常量

3. $f'(x_0)$ 与 $f'(x)$ 之间的关系:

$$f'(x_0) = f'(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} \neq \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = 0$$

(称呼: 导数、导函数、导数值)

2.1.3 求导举例

步骤: (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例3 求函数 $f(x) = C$(C为常数)的导数.

解 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C - C}{h} = 0$

即 $(C)' = 0$

例4 设函数 $f(x)=\sin x$,求$(\sin x)'$及$(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\frac{h}{2}}{h}=\cos x.$$ 即 $(\sin x)'=\cos x$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

类似的, $(\cos x)'=-\sin x$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

回忆：当$x \to 0$时

(1) $(1+x)^{\mu}-1 \sim \mu x \ (\mu \in R)$

(2) $a^{x}-1 \sim x \cdot \ln a$

(3) $\log_{a}(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$

例5 求函数 $y = x^{\mu}$ (μ是任意实数)的导数.

解 随着μ的取值不同，x^{μ}有不同的定义域，设 x属于x^{μ}的定义域且$x \neq 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu} \frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\mu} - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu} \frac{\mu \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \mu x^{\mu - 1}$$

当$\Delta x \to 0$时，有$\frac{\Delta x}{x} \to 0$

$$\therefore (1+\frac{\Delta x}{x})^{\mu} - 1 \sim \mu \frac{\Delta x}{x}$$

取μ为正整数n,有 $(x^{n})' = n x^{n-1}$

例如: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x^{-1})' = (-1) x^{-1-1} = -\frac{1}{x^{2}}$

例6 求函数 $f(x)=a^x (a>0, a\neq 1)$ 的导数。

解 $$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\ln a}{h}=a^x\ln a.$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a$ 特别: $(e^x)'=e^x$

当$h\to 0$时: $a^h-1\sim h\cdot\ln a$

例7 求函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的导数。

解 $y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h}{x\ln a}}{h}=\dfrac{1}{x\ln a}$

即 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ 特别：$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

当 $h\to 0$ 时，$\dfrac{h}{x}\to 0$ $\log_a(1+\dfrac{h}{x})\sim\dfrac{h}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$

★请记住以下基本求导公式:

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

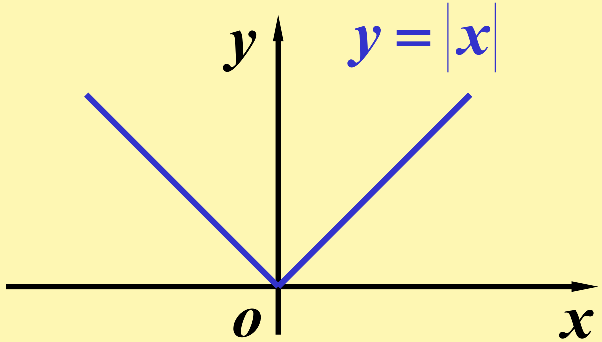
$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

例8 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h},$



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导.

注意: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-|-h|}{2h}=0$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{(x_0+h)-(x_0-h)}$$

说明:(1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$存在，$f(x)$在$x_0$处

未必可导. 如：函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处.

（2）若函数$f(x)$在x_0处可导，那么

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{(x_0+h)-(x_0-h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=f'(x_0)$$

例9

求$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ \cos x-1, & x<0 \end{cases}$在$x=0$处的导数.

解

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x}=0$$

$$\therefore f'(0)=0$$

2.1.4 导数的物理意义和几何意义

1. 导数的物理意义

	均匀	不均匀
速度	$v=\dfrac{s}{t}$	$v=\dfrac{ds}{dt}$
加速度	$a=\dfrac{v}{t}$	$a=\dfrac{dv}{dt}$
电流强度	$i=\dfrac{q}{t}$	$i=\dfrac{dq}{dt}$
线密度	$\rho=\dfrac{m}{l}$	$\rho=\dfrac{dm}{dl}$
角速度	$\omega=\dfrac{\theta}{t}$	$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$

在均匀情况下，凡是用除法定义的概念或物理量,在不均匀的情况下,绝大多数是导数

2. 导数的几何意义

切线的斜率：$k_{切}=\tan\alpha=f'(x_0)$ $(x_0,f(x_0))$是切点)

切线方程： $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程： $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\ (f'(x_0)\neq 0)$

特殊情况：

1) $f'(x_0)=0$时 切线：$y=y_0$ 法线：$x=x_0$

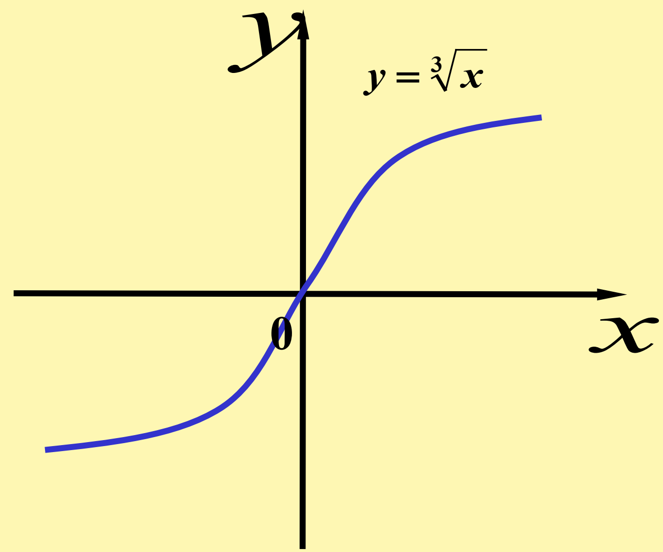
如：$y=x^2$在$x=0$处

2) $f'(x_0)=\infty$时　切线：$x=x_0$　　法线：$y=y_0$

如：$y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\infty$,

注：$f(x)=\sqrt[3]{x}$在$x=0$处不可导，

但有切线$x=0$.



注意: 导数存在 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 有切线

2.1.5 可导与连续的关系

定理2.1.1 可导函数都是连续函数。

证 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,则根据定义有:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$

$$=0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

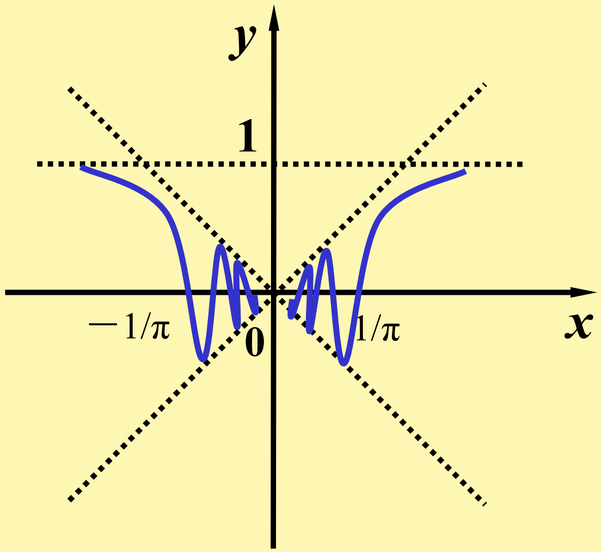
注意: 不连续一定不可导; 但连续未必可导.

注意：不连续一定不可导；但连续未必可导。

如例8中 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导。

再如：

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$ 不存在，在 $x=0$ 处不可导，

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续！ $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=f(0)$

★ 本讲内容小结

物理典型:速度问题

几何典型:切线问题

求切线和法线方程

导数的概念:函数对自变量的即时变化率

导数的定义:当自变量的增量趋于零时,函数增量与自变量增量之比的极限.

可导与连续的关系

利用定义求导数

加深对导数概念的理解;
基本求导公式的推导;
分段函数分界点处的可导性讨论;
抽象函数导数存在性的证明等.