2.2 求导法则

2.2.1 函数的和、差、积、商求导法则

2.2.2 反函数的求导法则

2.2.3 复合函数的求导法则

2.2.4 常用函数导数表

2.2.5 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

2.2.1 函数的和. 差. 积. 商求导法则

定理2.2.1 如果函数$u(x)$, $v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导, 并且

(1) $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $[\dfrac{u(x)}{v(x)}]' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x)\neq 0)$

推论 (1) $[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$

$$(2)\quad [Cf(x)]' = C'f(x) + Cf'(x)$$
$$= Cf'(x)$$

$$(3)\quad [f_1(x)f_2(x)f_3(x)]'$$
$$= \left(f_1 f_2\right)' f_3 + (f_1 f_2) f_3'$$
$$= f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$$

$$(4)\quad (\frac{1}{v})' = \frac{1' \cdot v - 1 \cdot v'}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}$$

例1 验证下列函数的导数

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

证 $(\tan x)' = (\dfrac{\sin x}{\cos x})' = \dfrac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\sec x)' = (\frac{1}{\cos x})' = \frac{(1)' \cdot \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

例2 设$y = x^3 \ln x \cos x + 3e^x - 2^x + \tan\frac{3}{4}\pi$，求$y'$.

解 $y' = \underline{(x^3 \ln x \cos x)'} + \underline{(3e^x)'} - \underline{(2^x)'} + \underline{(\tan\frac{3}{4}\pi)'}$

$$= \underline{(x^3)' \ln x \cos x + x^3 (\ln x)' \cos x + x^3 \ln x (\cos x)'}$$

$$+ 3e^x - 2^x \ln 2 \; +0$$

$$= 3x^2 \ln x \cos x + x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos x + x^3 \ln x \cdot (-\sin x)$$

$$+3e^x - 2^x \ln 2$$

$$= (3\ln x + 1)x^2 \cos x - x^3 \ln x \sin x + 3e^x - 2^x \ln 2$$

2.2.2 反函数的导数

定理2.2.2 设函数$y=f(x)$在某区间内单调、可导且$f'(x)\neq 0$, 则其反函数$x=g(y)$在对应区间内也可导, 且有

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数

例4 证明 $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$$

解

$y = \arcsin x$ $\because x = \sin y$在$I_y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$内单调、可导

且$(\sin y)' = \cos y \neq 0$, $(\cos y > 0)$ $\therefore$ 在$I_x \in (-1,1)$内有

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$\because x = \tan y$在$I_y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$内单调、可导，

且$(\tan y)' = \sec^2 y > 0$, $\therefore$ 在$I_x \in (-\infty, +\infty)$内有

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

2.2.3 复合函数的求导法则

定理2.2.3 (链式法则)

若 1)函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0可导，

2) $y=f(u)$在与x_0对应的点$u_0=\varphi(x_0)$可导,

则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导, 且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)=\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0}\cdot\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0}$$

$$y —— u —— x$$

2.2.3 复合函数的求导法则

定理2.2.3 (链式法则) y —— u —— x

若 1)函数 $u=\varphi(x)$ 在区间 I_x 可导，

2) $y=f(u)$ 在与区间 I_x 对应的区间 I_u 可导,

则复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 在区间 I_x 可导, 且其导数为

$$(f[\varphi(x)])'=f'(u)\Big|_{u=\varphi(x)}\varphi'(x)=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\Big|_{u=\varphi(x)}\cdot\frac{du}{dx}$$

即 因变量对自变量求导, 等于因变量对中间变量求导, 乘以中间变量对自变量求导。

$$(f[\varphi(x)])' = f'(u)\varphi'(x) = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

注 1) $(f[\varphi(x)])'$ 与 $f'[\varphi(x)]$ 记号的差异.

$(f[\varphi(x)])'$ 表示先将 $u = \varphi(x)$ 代入,再对 x 求导,

即先复合再求导;

$f'[\varphi(x)]$ 表示先对 u 求导,再将 $u = \varphi(x)$ 代入,

即先求导再复合.

2) 多层复合的情形 设 $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x)$,

则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

例5 求下列函数的导数

$$1)\ y=\sin\frac{2x}{1+x^2} \qquad 2)\ y=\tan^2(\ln x)$$

解 1)函数可视为由 $y=\sin u, u=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 复合而成

故 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\cos\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

2) $y = \tan^2(\ln x)$

函数可视为由 $y = u^2, u = \tan v, v = \ln x$复合而成

故 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx} = 2u \cdot \sec^2 v \cdot \dfrac{1}{x}$

$= 2\tan(\ln x) \cdot \sec^2(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$

注 1)在求复合函数导数时关键是搞清复合结构,然后如同锁链一样,需由表及里一层一层地求导,一直求到最里面,不能漏掉任何一层,否则导致错误。

2)熟练掌握后可以省去中间变量而直接写出求导结果。

例6 计算导数 (1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (2) $y=\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

解

$$(1)y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}})$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}})=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(arshx)'$$

$$(2)y=\frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})'=\frac{1-x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}(\frac{1+x}{1-x})'$$

$$=\frac{1-x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

例7 设$f(x)$可导,求$y=f(\ln x)\arctan\dfrac{1}{f(x)}$的导数.

解 $y'=(f(\ln x))'\arctan\dfrac{1}{f(x)}+f(\ln x)(\arctan\dfrac{1}{f(x)})'$

$$=f'(\ln x)\cdot(\ln x)'\cdot\arctan\frac{1}{f(x)}+f(\ln x)\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{f(x)})^2}\cdot(\frac{1}{f(x)})'$$

$$=f'(\ln x)\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{f(x)}+\frac{f(\ln x)}{1+(\frac{1}{f(x)})^2}\cdot(-\frac{1}{f^2(x)})f'(x)$$

$$=f'(\ln x)\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{f(x)}-\frac{f(\ln x)\cdot f'(x)}{1+f^2(x)}$$

2.2.4 常用函数导数表

1.导数运算的基本法则

$$(1)[Cu(x)]' = Cu'(x)$$

$$(2)[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x)$$

$$(3)[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$(4)\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$(5)[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(x)} \text{或} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$(6)(f[\varphi(x)])' = f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

2. 基本初等函数的导数公式

$$(C)'=0 \qquad (x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x \qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (e^x)'=e^x$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

例9 证明:$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

解 $x > 0$时, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$x < 0$时, $(\ln|x|)' = [\ln(-x)]'$

$$= \frac{1}{-x} \cdot (-x)'$$

$$= \frac{1}{x}$$

综上, $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

例10 求幂指函数$y=u(x)^{v(x)}\ (u(x)>0)$的导数y'。

解　作变形：$y=e^{v(x)\ln u(x)}$

$$\therefore\ y'=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot\big(v(x)\ln u(x)\big)'$$

$$=u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\right]$$

$$=u(x)^{v(x)}\cdot\ln u(x)\cdot v'(x)+u(x)^{v(x)-1}\cdot v(x)\cdot u'(x)$$

注 后面还可用隐函数求导法来计算。

例11 求下列函数的导数

$$(1)\ y=\sin^4 x-\cos^4 x \qquad (2)\ y=\frac{x^3+x+1}{1+x^2}$$

解 $(1)\ y'=4\sin^3 x\cdot(\sin x)'-4\cos^3 x\cdot(\cos x)'$

$$=4\sin^3 x\cos x+4\cos^3 x\sin x$$

$$=4\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)=2\sin 2x$$

另解： $y=\sin^4 x-\cos^4 x$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\cos 2x$$

$$y'=(-\cos 2x)'=-(-\sin 2x)\cdot 2=2\sin 2x$$

虽然求导可以有很多种方法,但显然把 $f(x)$ 先予以恒等变换成简单函数后再求导能简捷得多.

$$(2)\ y=\frac{x^3+x+1}{1+x^2}$$

解法一： $$y'=\frac{(x^3+x+1)'(1+x^2)-(x^3+x+1)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(3x^2+1)(1+x^2)-2x(x^3+x+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{x^4+2x^2-2x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$=1-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

另解： $$y=\frac{x(x^2+1)+1}{1+x^2}=x+\frac{1}{1+x^2}$$

$$y'=1-\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot(1+x^2)'=1-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

确定函数$y=f(x)$的三种方法：

显函数：$y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$

$$y=f(x)$$

隐函数：$x^2+y^2=1, y\geq 0$

$$x^2+y^2-1=0,\ \ y\geq 0 \qquad F(x,y)=0$$

参数方程所确定的函数：

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},\quad t\in[0,\pi]$$

2.2.5 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

隐函数求导的方法

方法1° 先将$F(x, y)=0$化成显函数$y=f(x)$(显化), 然后再求导。

方法2 由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数$y=y(x)$,

把$y=y(x)$代入原方程应有恒等式 $F(x,y(x))\equiv 0$

该等式两边对 x 求导，再从中解出y'_x,

此方法即为隐函数求导法.

如：$x^2+y^2-1=0,\ \ y\geq 0$

例12 利用隐函数求导法，求下列函数的导数 y'_x。

1) $y=\cos(x+y)$

$\cos(x+y)$可看作由$\cos u$和$u=x+y(x)$复合而成

解 $y(x)=\cos(x+y(x))$

把y看作x的函数，两边对x求导，有

$$y'=-\sin(x+y)\cdot(1+y')$$

解得：$y'=\dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$ 其中 $y=y(x)$由方程 $y=\cos(x+y)$确定

隐函数y一般不能表示成x的显式，故其导数 y'_x 一般也不能表示成x的显式，我们也没有必要把 y'_x表示为x的显式。

$2) e^y - e^{-x} + xy = 0$

解 $e^{y(x)} - e^{-x} + x \cdot y(x) = 0$

把y看作x的函数，两边对x求导，有

$$e^y \cdot y' + e^{-x} + y + x \cdot y' = 0$$

解得： $y' = -\dfrac{e^{-x} + y}{x + e^y}$

其中 $y = y(x)$由方程$e^y - e^{-x} + xy = 0$确定

若要求y'_x在$x = 0$处的值，

从原方程知，此时$e^y - 1 = 0$， $y = 0$， 故

$$\therefore y'\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = -\frac{(1+0)}{0+1} = -1$$

3.对数求导法

观察函数 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$， $y=x^{\sin x}$.

结构特点:

多个函数相乘或幂指函数 $u(x)^{v(x)}$的情形.

方法:

先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例14 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, 求$y'$.

解 等式两边先取绝对值再取对数得

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-2\ln|x+4|-x$$

上式两边对 x 求导得: (应用 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$)

$$y'=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}+\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

例15 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 用对数求导法求y'.

解 显然$y > 0.$

等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

4.由参数方程确定的函数的导数

[引例] 斜上抛物体运动 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

$$y = v_2 \cdot \frac{x}{v_1} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_1}\right)^2 = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2 v_1^2} x^2$$

前者物理意义清楚,后者几何意思明显,各有利弊.

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定x与y间的函数关系,

则称此函数$y=y(x)$(或$x=x(y)$)为参数方程所确定的函数.

参数方程: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

问题: $y' = \dfrac{dy}{dx} = ?$

例如 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数

$\therefore y = t^2 = (\dfrac{x}{2})^2$ $\therefore y' = \dfrac{1}{2}x$

问题: 消参困难或无法消参如何求导?

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中, $y = y(x)$看作由$y = \psi(t), t = \varphi^{-1}(x)$复合而成

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$$

再设函数$x = \varphi(t), y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi'(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

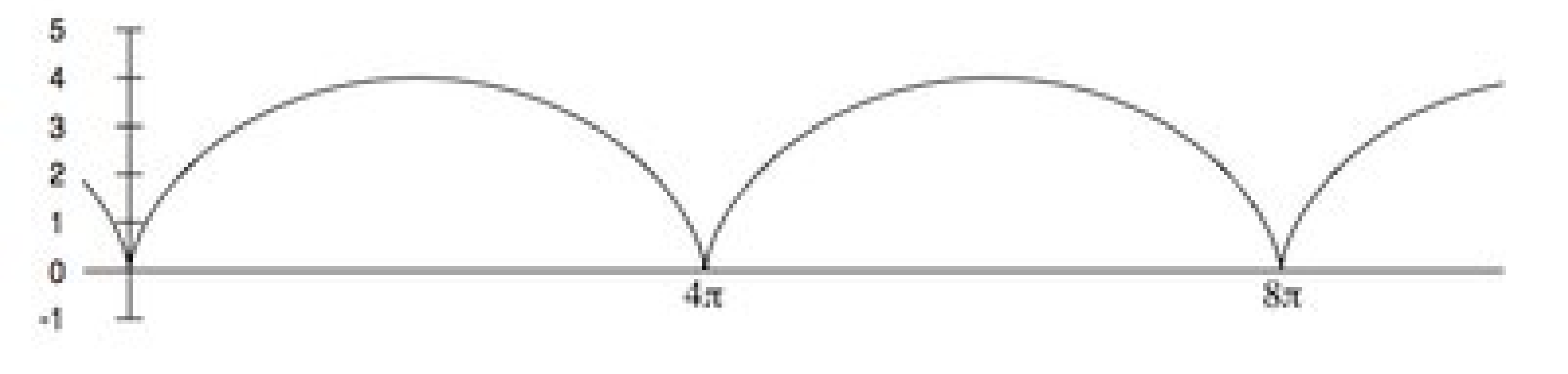
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$

摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 实参数t 是在弧度制下，圆滚动的角度

1599年伽利略为摆线命名

圆上某定点滚动的轨迹



例16 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

其中 $t = t(x)$ 由 $x = a(t - \sin t)$ 确定

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 1$$

当 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 时, $x = a(\dfrac{\pi}{2} - 1), y = a$

$\therefore$ 所求切线方程为:

$$y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)$$

即: $y = x + a(2 - \dfrac{\pi}{2})$

（※ 极坐标方程确定的函数的导数）

例18 求心脏线$r = a(1+\cos\theta)$在$\theta = \dfrac{\pi}{2}$处的切线.

解 根据极坐标与直角坐标间的关系有：

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{a(\cos\theta+\cos 2\theta)}{a(-\sin\theta-\sin 2\theta)}$$

$$= -\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta+\sin 2\theta}$$

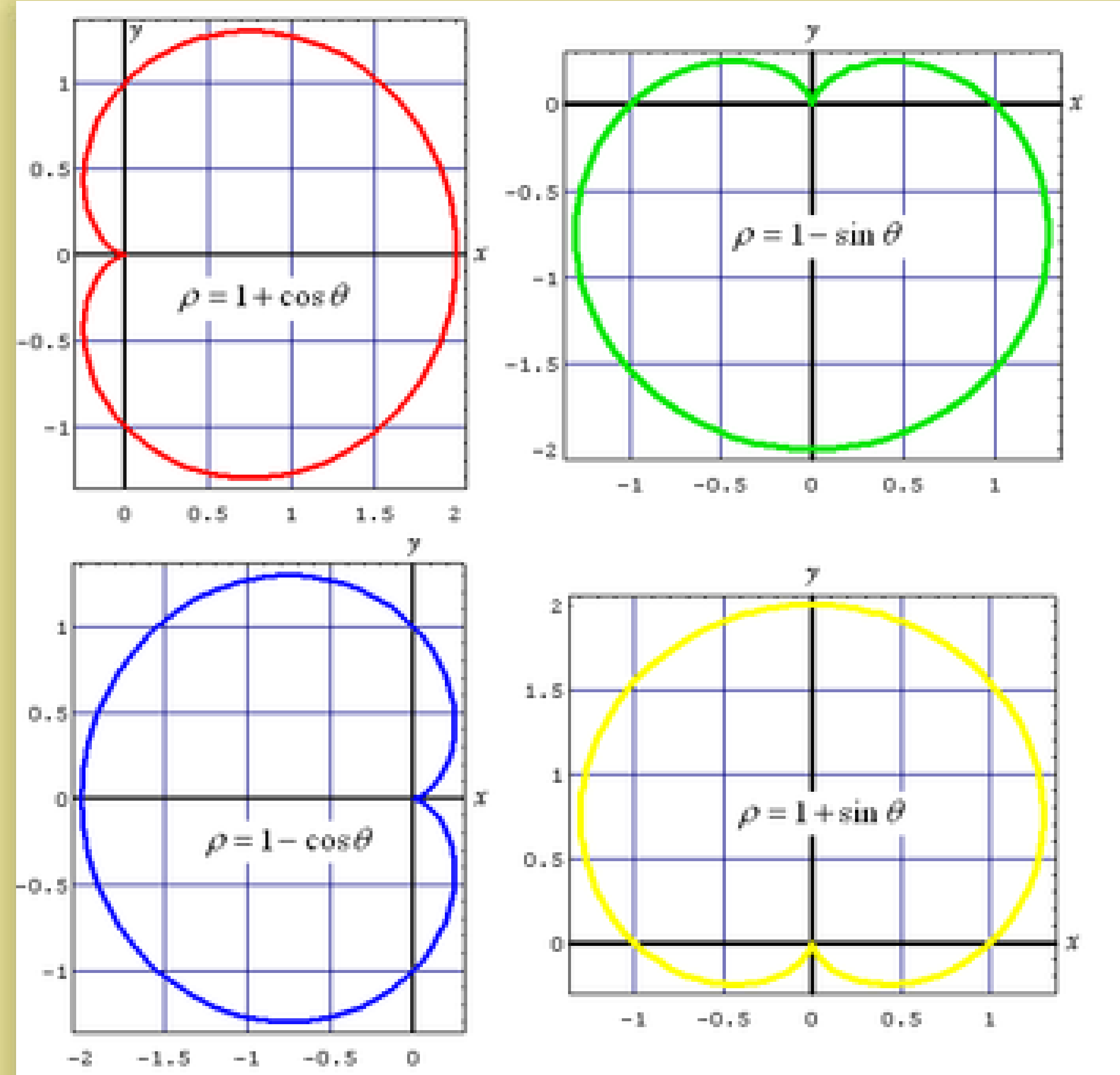
$$\therefore k_{\text{切}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1$$

$\because \theta = \dfrac{\pi}{2}$时$x = 0, y = a$

$\therefore$ 所求切线为: $y = x + a$

$$r = r(\theta)$$

化为参方 $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$



四个朝着
不同方向
的心脏线