# ★上讲内容回顾(1)

求导法则及方法

(1)四则运算求导法则

$$[Cu(x)]' = Cu'(x) \qquad [u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x)$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

(2)反函数求导法则: $[f^{-1}(x)]' = \dfrac{1}{f'(x)}$ 或 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(3)复合函数求导法则: $(f[\varphi(x)])' = f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$

(4)隐函数求导: 在方程两边直接求导

(5)参数方程求导: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

(6)对数求导法: 方程两边取对数再求导数

## 常用基本求导公式

$C' = 0 \quad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a \quad (e^x)' = e^x$

$(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(shx)' = chx$

$(chx)' = shx$

$(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(arshx)' = (\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(archx)' = (\ln(x+\sqrt{x^2-1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} (x > 1)$

$(arthx)' = (\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x})' = \dfrac{1}{1-x^2} (|x| < 1)$

# 2.3 高阶导数及相关变化率

2.3.1 高阶导数

2.3.2 相关变化率

# 2.3.1 高阶导数

## 1、高阶导数的概念

引例:变速直线运动的加速度

设 $s = f(t)$, 则瞬时速度为 $v(t) = f'(t)$

$\because$ 加速度$a$是速度$v$对时间$t$的变化率

$\therefore a(t) = v'(t) = [f'(t)]'$

定义　如果函数$f(x)$的导数$f'(x)$在点$x$处可导,即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在, 则称$(f'(x))'$为函数$f(x)$在点$x$处的二阶导数.

$$\left(f'(x)\right)' = \frac{d\left(f'\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

记作: $f''(x)$或$y''$或$\frac{d^2 y}{dx^2}$或$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

类似地,可定义三阶导数、四阶导数……

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]' = \frac{d}{dx}(y^{(n-1)}) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(x+\Delta x) - f^{(n)}(x)}{\Delta x}$$

分别记作:

$$y''', y^{(4)}, \cdots\cdots, y^{(n)} \text{ 或 } f'''(x), f^{(4)}(x), \cdots\cdots, f^{(n)}(x)$$

$$\text{或 } \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \cdots\cdots, \frac{d^ny}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^3f}{dx^3}, \frac{d^4f}{dx^4}, \cdots\cdots, \frac{d^nf}{dx^n}$$

注: 1.二阶及二阶以上的导数称为高阶导数。

约定: $y'$ 称为函数 $y$ 的一阶导数;

$y$ 称为函数 $y$ 的零阶导数, 即 $y = y^{(0)}$.

2.函数 $f(x)$在点$x$处具有$n$阶导数,也常说成 $f(x)$在点$x$处$n$阶可导, 而且当 $f(x)$在点$x$处$n$阶可导时, 蕴涵着在$x$的某邻域内一切低于$n$阶的导数都是存在且连续的.

## 2、高阶导数的计算

1)直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数

例1 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,求 $y'''$。

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$$y''=((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$y'''=-(x^2+1)^{-3/2}-x\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(x^2+1)^{-5/2}\cdot 2x$$

$$=(x^2+1)^{-5/2}(-(x^2+1)+3x^2)=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}$$

直接法求n阶导数一般适用于阶数不太高,如 n<5时

例2　基本初等函数的$n$阶导数：

(1) $(e^x)^{(n)} = e^x \qquad (a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \quad (a>0且a\neq 1)$

(2) $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y'' = -\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

……

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\sin ax+b)^{(n)} = a^n\sin(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$(\cos ax+b)^{(n)} = a^n\cos(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

注意：求n阶导数时，求出1-3或4阶后，不要急于合并，先分析结果的规律性，再写出$n$阶导数，最后用数学归纳法证明

(3)设 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

……

$$y^{(n)} = (x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$$

若α为自然数$n$，则

$$y^{(n)} = (x^{n})^{(n)} = n!, \qquad y^{(n+1)} = (n!)' = 0$$

(3) $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\cdots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

(4) $y = \ln x$ 则$y' = \dfrac{1}{x}$ $y'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)'$ $y''' = \left(\dfrac{1}{x}\right)''$ ……

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1,\ 0! = 1)$$

## 2)间接法

★ 高阶导数的运算法则

设函数$u$和$v$具有$n$阶导数, 则

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$　(2) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(3) $$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$　莱布尼兹公式

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

(3) $$(u\cdot v)' = u'v + uv' = C_1^0 u' v^{(0)} + C_1^1 u^{(0)} v'$$

$$(u\cdot v)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$= C_2^0 u'' v^{(0)} + C_2^1 u' v' + C_2^2 u^{(0)} v''$$

$$(u\cdot v)''' = C_2^0 u''' v^{(0)} + C_2^0 u'' v' + C_2^1 u'' v' + C_2^1 u' v''$$

$$+ C_2^2 u' v'' + C_2^2 u^{(0)} v'''$$

$$= C_3^0 u''' v^{(0)} + C_3^1 u'' v' + C_3^2 u' v'' + C_3^3 u^{(0)} v'''$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

间接法：利用已知的高阶导数公式, 通过运算法则, 变量代换等方法, 求出n阶导数。

例4 计算下列函数的$n$阶导数：(1) $y = x^2 \sin 3x$

解 (1) $y^{(n)} = (\underbrace{x^2}_{v}\ \underbrace{\sin 3x}_{u})^{(n)}$ $\quad (u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

$$\overset{\text{莱布尼兹公式}}{=} (\sin 3x)^{(n)} \cdot x^2 + n(\sin 3x)^{(n-1)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!}(\sin 3x)^{(n-2)} \cdot (x^2)''$$

$$= 3^n \sin(3x + n\cdot\frac{\pi}{2}) \cdot x^2 + n3^{n-1} \sin(3x + (n-1)\cdot\frac{\pi}{2}) \cdot 2x$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!} 3^{n-2} \cdot \sin(3x + (n-2)\cdot\frac{\pi}{2}) \cdot 2$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n \qquad (n = 2k+1)$$

$$= (a+b)[a^{n-1} + a^{n-2}(-b) + \cdots + a(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}]$$

(2) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

**解** $y = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore y^{(n)} = \frac{3}{8}\cdot 4^n \cdot \cos(4x + n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (n \geq 1)$$

$$(3)\, y=\frac{2x+1}{x^2-x-2}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}$$

$$=\frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{(a+b)x+a-2b}{(x-2)(x+1)}$$

**解**

$$y=\frac{2x+1}{x^2-x-2}=\frac{\frac{5}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}=\frac{5}{3}(x-2)^{-1}+\frac{1}{3}(x+1)^{-1}$$

$$\therefore\ y^{(n)}=\frac{5(-1)^n}{3}\cdot\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{3}\cdot\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

**注** 计算高阶导数一般比较麻烦,多使用间接法,使用时,应根据给出的函数先予以化简变成基本公式中的形式(如(2)(3)),然后再套用公式计算。

## 3)分段函数、隐函数以及参数方程表达的函数的高阶导数

**例5** 设$f(x)=\begin{cases} e^x & x\ge 0 \\ ax^2+bx+c & x<0 \end{cases}$,问$a,b,c$为何值时$f(x)$在$x=0$处具有二阶导数。（教材例子）

解

$$\begin{cases} f(0^+)=f(0^-)=f(0) & (f(x)\text{在}x=0\text{处连续}) \\ f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0) & (f(x)\text{在}x=0\text{处一阶可导}) \\ f''_+(0)=f''_-(0)=f''(0) & (f(x)\text{在}x=0\text{处二阶可导}) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x\geq 0 \\ ax^2+bx+c & x<0 \end{cases}$$

$f(0^+)=f(0^-)=f(0)$ （$f(x)$在$x=0$处连续）

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^x = \lim_{x\to 0^-}(ax^2+bx+c)=f(0)$$

$$\Rightarrow e^x\Big|_{x=0}=(ax^2+bx+c)\Big|_{x=0}=f(0)\Rightarrow 1=c=f(0)$$

$f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)$ （$f(x)$在$x=0$处一阶可导）

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+bx+c-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+c-c}{x}\quad\Rightarrow 1=b=f'(0)$$

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x\ge 0 \\ ax^2+bx+c & x<0 \end{cases}$$

$$1=c=f(0)$$

$$1=b=f'(0)$$

$$f'(x) \qquad =\begin{cases} e^x & x\ge 0 \\ 2ax+b & x<0 \end{cases}$$

$f''_+(0)=f''_-(0)=f''(0)$ （$f(x)$在$x=0$处二阶可导）

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+b-f'(0)}{x}=f''(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+b-b}{x-0}$$

$$\Rightarrow 1=2a=f''(0) \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ ax^2+bx+c & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0^+)=f(0^-)=f(0) \\ f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0) \\ f''_+(0)=f''_-(0)=f''(0) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & x>0 \\ 2ax+b & x<0 \end{cases}$$

$$f'(0^+)=f'(0^-)=f'(0) \quad (f'(x)\text{在}x=0\text{处连续})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^x = \lim_{x\to 0^-}(2ax+b)=f'(0)$$

$$e^x\Big|_{x=0}=(2ax+b)\Big|_{x=0}=f'(0)$$

$$\Rightarrow 1=b=f'(0)$$

**例6** 设方程$y=\tan(x+y)$确定$y=y(x)$,求$y', y''$.

解 方程两边对$x$求导得:

$$y' = \sec^2(x+y)(1+y')$$

整理得: $y' = \dfrac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)} = \dfrac{1+\tan^2(x+y)}{-\tan^2(x+y)}$

$$\Rightarrow y' = -1-\frac{1}{\tan^2(x+y)} \quad \Rightarrow y' = -1-\frac{1}{y^2}$$

将上式中的 $y$ 仍视为 $x$ 的函数,继续对 $x$ 求导:

$$y'' = 2y^{-3}y' = -\frac{2}{y^3}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$$

**例7** 求由摆线$x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$所确定的函数$y=y(x)$的二阶导数。

解 $\because \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_\theta}{x'_\theta}=\dfrac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta\cdot\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}=-\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$$

求函数$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$的二阶导数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=g(t)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

注 应掌握该结论的推导思想！

## 2.3.2 相关变化率 （自学）

设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数，

而变量 $x$ 与 $y$ 之间存在某种关系，

从而它们的变化率 $\dfrac{dx}{dt}$ 与 $\dfrac{dy}{dt}$ 间也存在一定关系，

这样两个相互依赖的变化率称为相关变化率。

相关变化率问题：

已知其中一个变化率时如何求出另一个变化率？

例8 一个气球的半径以$10cm/s$的速度增长着，求当半径为$10cm$时体积和表面积的增长速度.

解 设在时刻$t$时，气球的半径为$r=r(t)$，则气球的体积和表面积分别为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3(t) \qquad S=4\pi r^2(t)$$

显然，$V$和$S$都是$t$的函数.

今问：当$r=10cm$时$V'(t)=?\ S'(t)=?$

因为$r(t)$未知，无法求出$V(t),S(t)$关于$t$的导数，所以只能从已知公式出发考虑问题，从而得

$r(t)=10cm$时 $\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2(t)\cdot\frac{dr(t)}{dt}$

由题设知 $\frac{dr(t)}{dt}=10cm/s$

$\therefore \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r(t)=10}=4\pi\cdot 10^2\cdot 10=4000\pi cm^3/s$

类似地， $\frac{dS}{dt}=4\pi\cdot 2r(t)\cdot\frac{dr(t)}{dt}$

$\therefore \left.\frac{dS}{dt}\right|_{r(t)=10}=4\pi\cdot 2\cdot 10\cdot 10=800\pi cm^2/s$

即$r=10cm$时,体积的增长速度为$4000\pi cm^3/s$,

表面积的增长速度为$800\pi cm^2/s$

---

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3(t) \qquad S=4\pi r^2(t)$$

## ★本讲内容小结

**1.高阶导数**

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

常见函数的$n$阶导数公式

$n$阶导数运算法则 *莱布尼兹公式

**2.变化率与相关变化率**

变化率在科技和实践中具有广泛的应用,作为导数的实际背景应掌握好;两个相互依赖的变化率称为相关变化率.