变化率问题—导数

- 概念
- 计算
- 简单应用 —相关变化率问题

改变量问题—微分

- 概念
- 计算
- 简单应用 —近似计算

2.4 微分

2.4.1 微分的概念

1、问题的提出

实例 设有一质点沿直线作变速运动,运动规律是$s(t)$,则由时刻t到 $t+\Delta t$ 这段时间内,它所经过的路程为$\Delta s = s(t+\Delta t)-s(t)$,

当$s(t)$相当复杂时,精确计算Δs 相当困难

但是,若时间间隔Δt充分小,

则在这段时间内质点的瞬时速度来不及发生很大的改变,

因此可认为它在做匀速运动,速度为$s'(t)$,

于是路程 $\Delta s \approx s'(t)\Delta t$,

即用关于Δt的一次函数$s'(t)\Delta t$来代替Δs !

设函数 $y = x^2$ 在点 x_0 处的改变量为 Δx 时，求函数的改变量 Δy

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \underbrace{2x_0 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}$$

(1) Δx 的线性函数，为 Δy 的主要部分；

$|\Delta x| \to 0$ 时，(2)是 Δx 的高阶无穷小，当 $|\Delta x|$ 很小时可忽略。

$\therefore \Delta y \approx 2x_0 \cdot \Delta x$ —— 既容易计算又是较好的近似值

问题：这个线性函数(函数改变量的主要部分)是否所有函数的改变量都有？它是什么？如何求？

2. 微分的定义

定义2.4.1　设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义, x_0及 $x_0+\Delta x$也在这区间内，如果有：

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

(其中A是不依赖于Δx的常数)成立，则称函数 $y=f(x)$在点x_0可微,而$A\Delta x$叫做函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分,记作：

$$dy\big|_{x=x_0} \text{ 或 } df(x)\big|_{x=x_0}, \text{ 即 } dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x$$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x) \qquad dy\big|_{x=x_0} = A\cdot\Delta x$$

微分dy叫做函数增量Δy的线性主部（微分的实质）

(1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是$\Delta x$的高阶无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时，dy与Δy是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = \frac{A\cdot\Delta x + o(\Delta x)}{A\cdot\Delta x} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A\cdot\Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0)$$

(4) A是与Δx无关的常数，但与$f(x)$和x_0有关;

(5) 当$|\Delta x|$很小时，$\Delta y \approx A\Delta x$或$\Delta y \approx dy$，(线性主部)

其误差为$o(\Delta x)$

3. 函数可微的条件

定理2.4.1 函数 $f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点x_0处可导, 且 $A=f'(x_0)$

该定理说明:对于一元函数,可导与可微是等价的

证明: (必要性) 设 $y=f(x)$ 在x_0处可微, 则有:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

则有 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

故$f(x)$ 在x_0处可导, 且有 $f'(x_0)=A$

定理2.4.1 函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，且 $A=f'(x_0)$

(充分性) 要证$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$

设$f(x)$ 在x_0 处可导，即有:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \qquad (\alpha\text{是}\Delta x\to 0\text{时的无穷小})$$

于是有 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$

式中 $f'(x_0)$与Δx无关， $\alpha\cdot\Delta x=o(\Delta x)$

即$f(x)$在x_0处可微.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

注

$$dy\big|_{x=x_0} = A\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot dx$$

1) 函数 $y=f(x)$在任意点x的微分，称为函数的微分，记作dy或$df(x)$，即 $dy = f'(x)\Delta x$

2) 取 $y=x$,有$dx = dy = x'\Delta x = \Delta x$

$$\Rightarrow dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

3) $\because dy = f'(x)dx \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

函数的微分dy 与 自变量的微分dx之商等于该函数的导数，导数也叫"微商"

与前面导数定义部分相比,记号“ $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{df(x)}{dx}$ ”的含义内涵更丰富了.

例如 1)利用微商的概念，参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的函数$y=y(x)$的导数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(t)}{d\varphi(t)}=\frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

2)反函数的导数: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

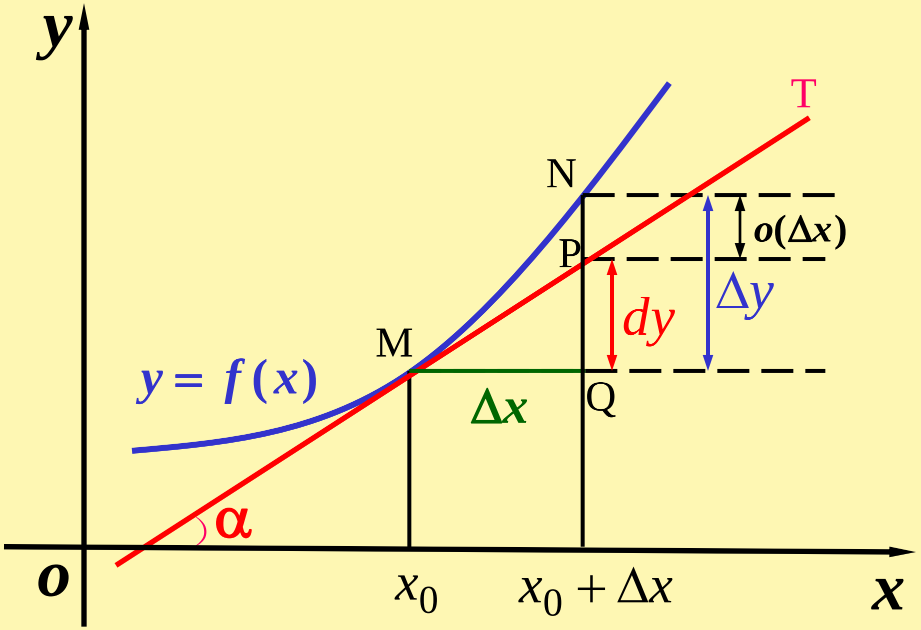
3) 复合函数的导数: $y=f(u),\ u=\varphi(x)$: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

4、微分的几何意义 $dy = f'(x_0)\cdot dx$

$$\tan\alpha \cdot MQ = PQ = dy \approx \Delta y = NQ$$

几何意义（如图）

当Δy是曲线的纵坐标增量时，dy就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，

切线段MP可近似代替曲线段MN.（以直代曲）

2.4.2 微分的运算法则及基本公式

$dy = f'(x)dx \Rightarrow$ 求法：计算函数的导数, 再乘以自变量的微分

1) 基本初等函数的微分公式

$$d(C) = 0 \qquad d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\operatorname{arc}\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$d(shx)=chxdx \quad d(chx)=shxdx \quad d(thx)=\frac{1}{ch^2x}dx$$

$$d(arshx)=d(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$d(archx)=d(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$d(arthx)=d(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x})=\frac{1}{1-x^2}dx$$

2)函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{u^2}$$

3)复合函数的微分法则

设$y = f(u)$及$u = \varphi(x)$都可导，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy = y'_x dx = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx \quad \text{而} \varphi'(x)dx = du$$

即：$dy = f'(u)du = y'_u du$

★ 一阶微分形式不变性

设函数 $y = f(u)$ 有导数 $f'(u)$,

(1) 若 u 是自变量时, $\underline{dy = f'(u)du;}$

(2) 若 u 是中间变量时, 且为另一变量 x 的可微函数

$u = \varphi(x)$, 则 $dy = f'(u)\varphi'(x)dx = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

$\because \varphi'(x)dx = du$, $\therefore \underline{dy = f'(u)du}$

结论: 无论 u 是自变量还是中间变量, 函数

$y = f(u)$ 的微分形式总是 $dy = f'(u)du$

通常把这个性质称为一阶微分形式不变性.

$$d(e^{-ax}) = d(e^{u}) = e^{u}du = e^{-ax}d(-ax)$$

令 $u = -ax$ $\qquad = -ae^{-ax}dx$

例1 利用一阶微分形式不变性求下列函数的微分

$$(1)\, y = e^{-ax}\sin bx \qquad (2)\, y\sin x - \cos(x-y) = 0$$

解 $(1)\, dy = \sin bx \cdot d(e^{-ax}) + e^{-ax}\cdot d(\sin bx)$

$$= \sin bx \cdot e^{-ax} d(-ax) + e^{-ax}\cdot \cos bx \cdot d(bx)$$

$$= e^{-ax}(b\cos bx - a\sin ax)dx$$

$$(2)\, d(y\sin x) - d(\cos(x-y)) = 0$$

$$\sin x dy + y d(\sin x) + \sin(x-y) d(x-y) = 0$$

$$\sin x dy + y\cos x dx + \sin(x-y)(dx - dy) = 0$$

$$\mathrm{d}y = \frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}\mathrm{d}x$$

一般来说，用微分运算法则求函数的微分比先求导再求微分更有规律一些，不易出错

$$(3)\quad y = f[\varphi(x^2)+\psi^2(x)]$$

$$(3)\ dy = f'[\varphi(x^2)+\psi^2(x)]d[\varphi(x^2)+\psi^2(x)]$$

$$= f'[\varphi(x^2)+\psi^2(x)][\varphi'(x^2)d(x^2)+2\psi(x)d\psi(x)]$$

$$= f'[\varphi(x^2)+\psi^2(x)][\varphi'(x^2)2xdx+2\psi(x)\psi'(x)dx]$$

$$= 2f'[\varphi(x^2)+\psi^2(x)][\varphi'(x^2)x+\psi(x)\psi'(x)]dx$$

例2 在下列等式左端的括号中填入适当的函数

(1) $d(\quad)=\cos\omega t\,dt$;　　(2) $d(\sin x^2)=(\quad)d(\sqrt{x})$.

解 (1) $\because d(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t dt$,

$$\therefore \cos\omega t dt=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega t)=d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t);$$

$$\therefore d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C)=\cos\omega t dt.$$

微分的反问题,是不定积分要研究的内容, 反问题往往出现多值性。

$$(2)\because \frac{d(\sin x^2)}{d(\sqrt{x})}=\frac{2x\cos x^2dx}{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}=4x\sqrt{x}\cos x^2,$$

$$\therefore d(\sin x^2)=(4x\sqrt{x}\cos x^2)d(\sqrt{x}).$$

2.4.3 高阶微分

1. 概念

函数$y=f(x)$在区间(a,b)上可微，则其微分

$dy=f'(x)dx=f'(x)\Delta x$与x,dx有关.

若将dx看成常数，则dy只是x的函数.

若该函数dy在区间内的各点仍然可微，

$$d(dy)=d(f'(x)dx)=dx\,d(f'(x))=f''(x)dx\cdot dx$$
$$=f''(x)(dx)^2$$

我们称$d(dy)$为$f(x)$在点x处的二阶微分，记为d^2y，

用dx^2表示$(dx)^2$，　则有$d^2y=f''(x)dx^2$，

类似可定义：$d^n y=f^{(n)}(x)dx^n$

2. 计算 $\boxed{d^n y = f^{(n)}(x)dx^n}$

计算函数$y = f(x)$的n阶微分只需求函数的n阶导数,再乘以自变量微分的n次幂(省去括号)即可.

3. n阶导数与n阶微分之间的关系

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \xRightarrow{\text{当}x\text{为自变量时}} f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

当x为自变量时,函数的n阶导数等于它的n阶微分与自变量的微分的n次幂之商.

注意　函数的一阶微分具有形式不变性,但对于高阶微分来说一般不再具有这种性质.

一些符号的区别：

$$dx^2 = (dx)^2$$

$$d(x^2) = 2x\,dx$$

$$d^2x = \begin{cases} d(dx) = 0 & \text{当}x\text{是自变量时} \\ \varphi''(t)\,dt^2 & x = \varphi(t) \end{cases}$$

2.4.4 微分在近似计算中的应用

$\because$ 可微 $\Rightarrow \Delta y = dy\big|_{x=x_0} + o(\Delta x)$

即 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y - dy \to 0$

$\therefore$ 当 $|\Delta x| << 1$ 时，有 $\Delta y \approx dy\big|_{x=x_0}$

利用微分去做一些近似：

1) 计算函数增量的近似值

$$f(\underbrace{x_0+\Delta x}_{x}) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x, \quad |\Delta x| << 1,$$

2) 计算 x_0 附近点 x 处的函数值的近似值

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad |x - x_0| << 1,$$

特别：0附近点 x 处的函数值的近似值

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x \qquad |x| << 1$$

几个工程上常用的近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x \qquad |x| << 1$$

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$; (2) $\sin x \approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x为弧度); (4) $e^x \approx 1 + x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

注意：“近似”与“等价”的区别和联系

证明 (1) 设 $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$,

$$f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{n}$$

$$\therefore f(x) \approx f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{x}{n}$$

例3 计算$e^{-0.03}$的近似值. $e^{x}\approx 1+x,\quad |x|<<1$

解: $e^{-0.03}\approx 1-0.03=0.97$

例3 计算 $\sqrt[3]{998.5}$ 的近似值

解: $\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}=\sqrt[3]{1000(1-\frac{1.5}{1000})}$

$=10\sqrt[3]{1-0.0015}\approx 10(1-\frac{1}{3}\times 0.0015)$

$=9.995$

$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x\quad |x|\ll 1$

★ 本讲内容小结

1.微分学所要解决的两类问题:

$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$

求导数与微分的方法,叫做微分法.

研究微分法与导数理论及其应用的科学,叫做微分学.

2.导数与微分的联系: 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

3.导数与微分的区别: (1) (2)

★ 导数与微分的区别:

1. 函数 $f(x)$ 在点x_0处的导数是一个定数 $f'(x_0)$,

而微分 $dy=f'(x_0)(x-x_0)$ 是x的线性函数,它的

定义域是R,实际上,它是$x\to x_0$时的无穷小.

$$\because \lim_{x\to x_0} dy=\lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0)=0.$$

2. 从几何意义上来看, $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在

点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率,而微分

$dy=f'(x_0)(x-x_0)$是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$

处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量.