第二章　习题课

1　导数和微分的概念及应用

2　导数和微分的求法

一、 导数和微分的概念及应用

- 导数： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

  当 $\Delta x\to 0^{+}$ 时，为右导数 $f'_{+}(x)$

  当 $\Delta x\to 0^{-}$ 时，为左导数 $f'_{-}(x)$

- 微分： $d\,f(x)=f'(x)\,dx$

- 关系：可导 $\Longleftrightarrow$ 可微

- 应用：

(1) 利用导数定义解决的问题

1) 推出三个最基本的导数公式及求导法则

$$(C)' = 0; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\sin x)' = \cos x$$

其他求导公式都可由它们及求导法则推出;

2) 求分段函数在分界点处的导数，及某些特殊函数在特殊点处的导数;

3) 由导数定义证明一些命题.

(2)用导数定义求极限

(3)微分在近似计算与误差估计中的应用

例1 设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线的斜率为 $\underline{\quad -2 \quad}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1 \quad \Rightarrow k=f'(1)=-2$$

注：已知极限求导数

例　设$f'(x_0)$存在,求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

解　原式$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x+(\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\right]$

$=f'(x_0)$

例2 若$f(1)=0$, $f'(1)$存在，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0}(\sin^2 x+\cos x)=1$ 且$f(1)=0$

联想到凑导数的定义式

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f'(1)$$

例3 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，试确定常数$a,b$使$f(x)$处处可导，并求$f'(x)$.

解

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \quad e^{n(x-1)}\to 0 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \quad e^{n(x-1)}=1 \\ x^2, & x>1 \quad e^{n(x-1)}\to\infty \end{cases}$$

$x<1$时，$f'(x)=a$；$x>1$时，$f'(x)=2x$.

利用 $f(x)$在 $x=1$处可导得

$$\begin{cases} f(1^-)=f(1^+)=f(1) \\ f'_-(1)=f'_+(1) \end{cases} \text{即} \begin{cases} a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1) \\ a=2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} a, & x<1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

$x<1$时，$f'(x)=a$； $x>1$时，$f'(x)=2x.$

$\therefore \quad a=2,\ b=-1, \quad f'(1)=2$

$$f'(x)=\begin{cases} 2, & x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

$f'(x)$是否是连续函数？

导函数连续：$f'(1)=f'(1^+)=f'(1^-)$

导数定义：$f'(1)=f'_+(1)=f'_-(1)$

二、导数和微分的求法

1. 正确使用导数及微分公式和法则

2. 熟练掌握求导方法和技巧

(1) 求分段函数的导数

注意讨论分段点处左右导数是否存在和相等

(2) 隐函数求导法 ⟶ 对数求导法

(3) 参数方程求导法 ⟵(转化)— 极坐标方程求导

(4) 复合函数求导法 (可利用微分形式不变性)

(5) 高阶导数的求法 —— 逐次求导归纳；

间接求导法; 利用莱布尼兹公式.

例4 设$y = e^{\sin x}\sin e^{x} + f(\arctan\frac{1}{x})$,其中$f(x)$可微,求$y'$。

解:

$$\mathrm{d}y = \sin e^{x}\,\mathrm{d}(e^{\sin x}) + e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin e^{x}) + f'(\arctan\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}(\arctan\tfrac{1}{x})$$

$$= \sin e^{x}\cdot e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) + e^{\sin x}\cdot\cos e^{x}\,\mathrm{d}(e^{x}) + f'(\arctan\tfrac{1}{x})\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}(\tfrac{1}{x})$$

$$= e^{\sin x}(\cos x\sin e^{x} + e^{x}\cos e^{x})\,\mathrm{d}x - \frac{1}{1+x^2}f'(\arctan\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{\sin x}(\cos x\sin e^{x} + e^{x}\cos e^{x}) - \frac{1}{1+x^2}f'(\arctan\tfrac{1}{x})$$

例5 设$x \le 0$时$g(x)$有定义,且$g''(x)$存在,问怎样选择a,b,c可使得下述函数在$x=0$处有二阶导数

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x>0 \\ g(x), & x \le 0 \end{cases}$$

解: 由题设$f''(0)$存在,因此

1)利用$f(x)$在$x=0$连续,即 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$,

$\Rightarrow c=g(0)=f(0)$

注意: $g'(0)=g'_-(0)$

$g''(0)=g''_-(0)$

2)利用$f'_+(0)=f'_-(0)$,而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(ax^2+bx+c)-c}{x-0}=b \quad \Rightarrow b=g'(0)$$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, x>0 \\ g(x), \quad x\le 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax+b, & x>0 \\ g'(x), & x<0 \end{cases}$$

$c=g(0)=f(0) \quad b=g'(0)=f'(0)$

3) $f''_-(0)=f''_+(0)$，而

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=g''(0)$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2ax+b)-b}{x-0}=2a$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2}g''(0)$$

例6 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases} \quad (0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

解 方程组两边对 t 求导,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)}\right)}{2(t+1)}$$

$$=\frac{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)\ -t\left[(1-\varepsilon\cos y)+\varepsilon(t+1)\sin y\frac{dy}{dt}\right]}{2(t+1)\ (t+1)^2(1-\varepsilon\cos y)^2}$$

$$=\frac{(1-\varepsilon\cos y)^2-2\varepsilon t^2(t+1)\sin y}{2(t+1)^3(1-\varepsilon\cos y)^3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2(t+1)\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{1-\varepsilon\cos y}\end{cases}\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{t}{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)}$$

例 7 求由方程 $x^y + y^x = 1$ 所确定隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：先将方程写成指数函数形式 $e^{y\ln x} + e^{x\ln y} = 1$,

然后在方程两端关于 x 分别求导，得

$$e^{y\ln x}\left(y'\ln x + \frac{y}{x}\right) + e^{x\ln y}\left(\ln y + x\frac{y'}{y}\right) = 0$$

$$x^y\left(y'\ln x + \frac{y}{x}\right) + y^x\left(\ln y + x\frac{y'}{y}\right) = 0$$

故 $y' = -\dfrac{y^x \ln y + yx^{y-1}}{x^y \ln x + xy^{x-1}}$ 其中 y 由方程 $x^y + y^x = 1$ 所确定.

补充

(1). $\frac{d}{dx}[f(\frac{1}{x^2})]=\frac{1}{x}$, 则$f'(\frac{1}{2})=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

解: 令$t=\frac{1}{x^2}$, 所以$x^2=\frac{1}{t}$, 则$2xx'=-\frac{1}{t^2}$

而$\frac{d[f(t)]}{dx}=\frac{d[f(t)]}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$, 由题意$\frac{d}{dx}[f(t)]=\frac{1}{x}$,

所以$\frac{d[f(t)]}{dt}=\frac{d[f(t)]}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)=-\frac{1}{2t}$

$\Rightarrow f'(\frac{1}{2})=-1.$

(2). $\varphi(x)$是单调连续函数 $f(x)$ 的反函数，且$f(1)=2$,

若$f'(1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,则$\varphi'(2)=$ $\underline{-\sqrt{3}}$.

解: 令$y=f(x), x=\varphi(y)$, 则$1=\varphi(2)$,

$$\varphi'(2)=\lim_{y\to 2}\frac{\varphi(y)-\varphi(2)}{y-2}=\lim_{y\to 2}\frac{x-1}{f(x)-f(1)}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{1}{f'(1)}=-\sqrt{3}$$

或$$\varphi'(2)=\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2}=\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}}=\frac{1}{f'(1)}=-\sqrt{3}$$

(3). 设$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0.3\Delta x+\ln^2(1+\Delta x)$,则 $\underline{\quad A \quad}$

(A) $f(x)$在x_0可微，$dy=0.3\Delta x$.　　(B) 不可微

(C) $f(x)$在x_0可微,$dy\neq 0.3\Delta x$.

3.求下列函数的导数.

(1) $y=\sin^2(\frac{1-\ln x}{x})$,

(2). 设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''(0)$.

(3). $y=\sqrt[x]{x}+\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}, (x>0)$求$y'$.

(4). $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

(5). $y=\arctan\frac{2x}{1+x^2}$,求$dy$.

(6)试从$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$中导出：$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$

(1) $y=\sin^2(\frac{1-\ln x}{x})$, $y'=\frac{\ln x-2}{x^2}\cdot\sin\frac{2(1-\ln x)}{x}$.

(2). 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

解： $e^y y'+y+xy'=0$ (1)

$e^y(y')^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0$ (2)

将$x=0, y=1$代入(1)，得$y'(0)=-\frac{1}{e}$

将$x=0, y=1, y'(0)=-\frac{1}{e}$代入(2)得$y''(0)=\frac{1}{e^2}$

(3). $y=\sqrt[x]{x}+\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}$, 求$y'$.

解：令 $y_1=\sqrt[x]{x}$, $y_2=\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}$, 求$y'$.

$$\ln y_1=\frac{1}{x}\ln x,\quad \ln y_2=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x+\frac{1}{4}\ln(e^x-1).$$

$$\frac{y_1'}{y_1}=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow y_1'=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\frac{y_2'}{y_2}=\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{2\sin x}+\frac{e^x}{4(e^x-1)}.$$

$$y_2'=\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x=1}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x+\frac{e^x}{4(e^x-1)}.\right)$$

$$\Rightarrow y'=y_1'+y_2'=\cdots$$

(4). $\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{1}{2}\dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

(5). $y = \arctan\dfrac{2x}{1+x^2}$，求 dy.

(5). $$dy = \frac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4}dx.$$

(6) 试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 中导出： $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$

解法一 $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{1}{y'}) \quad =\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}$

$$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

解法二　利用微分: $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{1}{y'})=\frac{d(\frac{1}{y'})}{dy}$

$$=\frac{-\frac{y''}{(y')^2}dx}{y'dx}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

求下列函数的n阶导数.

方法1 化简函数,利用已知的n阶导数公式

例1 设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}$.

解

$$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}$$

$$=4+\frac{3}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n![\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}].$$

方法2 利用莱布尼兹公式

例2 设 $y = x^2 e^{2x}$，求$y^{(20)}$.

解 则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$