

参考答案与提示

第 6 章 常微分方程

6.3 高阶线性微分方程

6.3.1 高阶线性微分方程解的结构

6.3.2 常系数线性微分方程

1、(1) $y = C_1(x^2 - 1) + C_2(x - 1) + 1$ (2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$

(3) $y = C_1 + C_2e^{4x}$ (4) $y = (C_1 + C_2x)e^x$

(5) $y = e^{-\frac{1}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$

2、(1) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

(2) 当 $\lambda^2 = 1$ 时, $y = (C_1 + C_2x)e^{-\lambda x}$

当 $\lambda^2 > 1$ 时, $y = C_1e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})x} + C_2e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})x}$

当 $\lambda^2 < 1$ 时, $y = e^{-\lambda x} (C_1 \cos \sqrt{1 - \lambda^2}x + C_2 \sin \sqrt{1 - \lambda^2}x)$

3、(1) $y^* = xe^{3x}(ax^2 + bx + c)$

(2) $y^* = xe^{4x}[(ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x]$

(3) $y^* = e^x(a \cos x + b \sin x)$

(4) $y^* = Ce^x + (ax + b)\cos x + (dx + e)\sin x$

4、(1) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{4}(1 + x)$

(2) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$

(3) $y = C_1 + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

5、(1) $y = e^{-x}(x - \sin x)$ (2) $y = \frac{1}{24}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$

6.3.3 欧拉方程

1、 $y = C_1x^3 + C_2x^2 + \frac{1}{2}x$

2、 $y = x[C_1 \cos(\sqrt{3} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{3} \ln x)] + \frac{1}{2}x \sin(\ln x)$

6.4 总习题

1、(1) C (2) D

2、(1) $y'' + 2y' + 5y = 0$ (2) $x[(ax + b)\cos x + (dx + e)\sin x]$

3、(1) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x} + \frac{3}{4}$

(2) $y = e^{\frac{1}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{3}{26}\cos 2x$

$-\frac{1}{13}\sin 2x + \frac{1}{2}$

(3) $y = (\frac{3}{4} + \frac{3}{2}x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{e^{-x}}{4}$

(4) $y = 2xe^x \sin x$

4、 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x$

第7章 多元函数微分学及其应用

7.1 多元函数的概念

- 1、(1) $\{(x, y) | y > x^2, x^2 \leq 1 - y\}$
 (2) $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \geq z^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$ (3)不存在 (4)连续
 3、(1) 0 (2) 0

7.2 偏导数与全微分

- 1、(1) $\frac{1}{2}$ (2) $ye^{\sin(xy)} \cos(xy)$ (3) $e^{-xy}(x^2y - 2x)$
 (4) $(2e^{-y} - \frac{3}{2\sqrt{x}})dx - 2xe^{-y}dy$ (5) $2dx$ (6) $0.25e$
 2、(1) $f_x = x^{y-1}y^{z+1}$ $f_y = x^y y^z \ln x + x^y z y^{z-1}$ $f_z = x^y y^z \ln y$
 (2) $z_x = (1+xy)^y \frac{y^2}{1+xy}$ $z_y = (1+xy)^y [\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}]$
 3、 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0$ $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$

7.3 多元复合函数求导法

- 1、(1) $24t^3 + 3t^2 - 2t$ (2) $\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$ (3) $2xyf(\frac{y}{x})$ 或 $2z$
 2、(1) $u_x = f'_1 + yf'_2 + zf'_3$ $u_y = xf'_2 + xzf'_3$ $u_z = xyf'_3$
 (2) $f'_1 + xyf''_{11} - \frac{1}{y^2}f'_2 - \frac{x}{y^3}f''_{22}$
 (3) $2f' + 4x^2f''$ $4xyf''$
 (4) $-\sin y(\cos xf''_{21} + e^{x+y}f''_{23}) + e^{x+y}(f'_3 + \cos xf''_{31} + f''_{33}e^{x+y})$

7.4 隐函数求导法

- 1、 $\frac{2xy - y \cos(xy)}{x \cos(xy) - x^2}$ 2、 $\frac{2z^2 - 2z - z^3}{x^2(z-1)^3}$
 3、 $\frac{x F'_1}{z(F'_1 + F'_2)}$ $\frac{y F'_2}{z(F'_1 + F'_2)}$
 4、(1) $-\frac{x(1+6z)}{2y(1+3z)}$ $\frac{x}{1+3z}$
 (2) $\frac{f'_2 g'_1 + u f'_1(2y v g'_2 - 1)}{f'_2 g'_1 - (1 - x f'_1)(1 - 2y v g'_2)}$ $\frac{g'_1(1 - x f'_1 - u f'_1)}{f'_2 g'_1 - (1 - x f'_1)(1 - 2y v g'_2)}$

7.5 多元函数微分学的几何应用

- 1、(1) $x - \frac{1}{4} = y - \frac{1}{3} = z - \frac{1}{2}$ (2) $x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4$
 (3) $\frac{3}{\sqrt{22}}$ (4) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}$
 2、 $x + 4y + 6z = \pm 21$ 3、 $\frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$
 4、 $a = -5, b = -2$

7.6 方向导数与梯度

- 1、(1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{9}\{1, 2, -2\}$
 2、 $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2 + b^2)}$ 3、 $\sqrt{3}$ 4、 $\frac{1}{\sqrt{21}}\{2, -4, 1\}$ $\sqrt{21}$

7.7 多元函数极值及其求法

- 1、极小值: $f(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$
 2、最大值 $z(2,1) = 4$, 最小值 $z(4,2) = -64$
 3、 $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$ 4、 $d_{\max} = \sqrt{9+5\sqrt{3}}$ $d_{\min} = \sqrt{9-5\sqrt{3}}$

7.8 总习题

- 1、(1) 1 (2) $\frac{2y^3 + xz\varphi'}{xy\varphi'}$ (3) $4f''_{11} + \frac{4}{y}f''_{12} + \frac{1}{y^2}f''_{22}$
 (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$
 2、(1) C (2) B (3) D (4) C
 (5) A (6) B
 3、 $f'_1 + xyf''_{11} + 2xye^{xy}f''_{12} + (xy+1)e^{xy}f'_2 + xye^{2xy}f''_{22} + \varphi''$
 $dz = (yf'_1 + ye^{xy}f'_2 + \varphi')dx + (xf'_1 + xe^{xy}f'_2 + \varphi')dy$
 4、 $e^{u+v} \frac{2[x(u-v) + y^2]}{u+v}$ $e^{u+v} \frac{2y(2x+u-v)}{u+v}$
 7、点 $(1, \frac{1}{2}, 1)$ 处 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z-1}{-2}$ $x+2y-2z=0$
 点 $(1, \frac{1}{2}, -1)$ 处 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z+1}{2}$ $x+2y+2z=0$
 8、(1) $x+y+\frac{1}{2}z-2=0$ 和 $x+y+\frac{1}{2}z+2=0$ (2) $\frac{1}{3}$
 9、最大值为 8, 最小值为 0

第 8 章 重积分

8.1 重积分的概念与性质

- 1、 $I_1 = 4I_2$
 2、(1) $\iint_D \ln(x+y)dxdy < \iint_D [\ln(x+y)]^2 dxdy$
 (2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dv \leq \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$
 3、(1) $36\pi \leq I \leq 100\pi$ (2) $-\frac{32\pi}{3} \leq I \leq \frac{32\sqrt[3]{3}\pi}{3}$

8.2 二重积分的计算法

8.2.1 利用直角坐标计算二重积分

- 1、(1) $\int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$ 或 $\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{4}}^y f(x,y)dx$
 (2) $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$
 或 $\int_{-1}^0 dy \int_0^{1+y} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx$
 (3) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx$ (4) $\int_{-1}^1 dy \int_{\frac{1}{2}^{(y-1)}}^{\frac{1}{2}^{(y+1)}} f(x,y)dx$
 2、(1) -2 (2) $\frac{9}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ 3、 $\frac{7}{2}$ 4、 $\frac{4}{3}$

8.2.2 利用极坐标计算二重积分

- 1、(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R \sin \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$
 (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}^{\frac{1}{\cos^2 \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$ (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho$

(4) $\int_0^{\arctan R} d\theta \int_0^R f(\tan \theta) \rho d\rho$ 2、(1) $\frac{\pi}{8}$ (2) $\frac{4}{5}\pi R^5$ (3) $\frac{3968}{15}\pi$ (4) $\frac{\pi}{10}$

2、(1) $\frac{\pi^2}{6}$ (2) πR^3 (3) $\frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1)$ 3、 $\frac{16}{9}(3\pi - 4)$

8.3 三重积分的计算法

8.3.1 直角坐标系下三重积分的计算法

1、(1) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz$

(2) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{x+y+10} f(x, y, z) dz$

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} dy \int_{3x^2+y^2}^{1-x^2} f(x, y, z) dz$

2、(1) $\frac{5}{2}$ (2) 0 (3) 72π

8.3.2 柱面坐标系下三重积分的计算法

1、(1) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho^2) dz$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz$

2、(1) 8π (2) $\frac{7\pi}{12}$ (3) 336π 3、 $\frac{32}{3}\pi$

8.3.3 球面坐标系下三重积分的计算法

1、(1) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{4\cos \varphi} f(r^2 \sin^2 \varphi, r^3 \cos^3 \varphi) r^2 dr$

(2) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 dr$

8.4 重积分的应用

1、 $\sqrt{2}\pi$ 2、 $(0, 0, \frac{5}{4}R)$ 3、 $(0, \frac{4b}{3\pi})$

4、 $\frac{96}{7}$ 5、 $\frac{3}{2}\pi R^4 \mu H$

8.5 总习题

1、(1) 0

(2) $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx$

2、(1) A (2) B (3) C

3、(1) $e^{-\frac{1}{2}}$ (2) $\frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}$ (3) 80π

(4) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$ (5) $\frac{1}{3}R^3(\pi - \frac{4}{3})$

6、(1) $\frac{31}{15}\pi$ (2) $\ln \sqrt{2} - \frac{5}{16}$ (3) $\frac{256}{3}\pi$ (4) $\frac{59}{480}\pi R^5$

7、 $2\pi t[\frac{h^3}{3} + hf(t^2)]$ 8、1 9、 $\frac{16}{3}a^2\pi$

10、(1) $(0, 0, \frac{7}{15}a^2)$ (2) $\frac{112}{45}\mu a^6$

第9章 曲线积分与曲面积分

9.1 曲线积分

9.1.1 对弧长的曲线积分

- 1、(1) $\sqrt{2}$ (2) π
 2、(1) $\frac{5\sqrt{5}-1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $e^a(2 + \frac{\pi}{4}a) - 2$ (3) π
 3、 $a^2\pi\sqrt{a^2+k^2}(2a^2 + \frac{8}{3}k^2\pi^2)$

9.1.2 对坐标的曲线积分

- 1、(1) $-\frac{56}{15}$ (2) 13 (3) -2π (4) $-\frac{\pi}{2}a^3$ (5) 14
 2、 $\int_L [\sqrt{2x-x^2}P(x,y) + (1-x)Q(x,y)]ds$

9.2 格林公式及其应用

- 1、(1) -18π (2) 4 2、(1) -2π (2) $a^2\pi$ 3、 $\frac{\pi^2}{4}$
 4、 $x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C$ 5、 $\frac{3}{8}a^2\pi$

9.3 曲面积分

9.3.1 对面积的曲面积分

- 1、(1) $\frac{4}{3}\pi R^4$ (2) $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ (3) $2\pi \arctan \frac{H}{R}$ 2、 $\frac{1}{2}\pi^2 R^3$

9.3.2 对坐标的曲面积分

- 1、(1) $-\frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{2\pi}{105}R^7$ (3) $\frac{3}{2}\pi$

$$2、\iint_{\Sigma} (\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R)dS \quad 3、\frac{1}{2}$$

9.4 高斯公式 通量与散度

- 1、(1) $3V$ (2) $2x - 6yz$
 2、(1) $\frac{6}{5}a^5\pi$ (2) $-\frac{\pi}{4}h^4$ (3) 4π 3、 108π

9.5 斯托克斯公式 环流量与旋度

- 1、(0,0,0)
 2、(1) $-\sqrt{3}\pi R^2$ (2) $-2\pi a(a+b)$ 3、 2π

9.6 总习题

- 1、(1) $12a$ (2) -6π (3) $\frac{4}{3}\pi R^4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ (4) 0
 2、(1) D (2) A (3) D (4) C
 3、(1) $2a^2$ (2) 18π (3) $\frac{4}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$
 (5) $(\frac{\pi}{2} + 2)a^2b - \frac{\pi}{2}a^3$ (6) 当 $R < 1$ 时 0 当 $R > 1$ 时 π
 (7) $-\frac{4}{\pi}$ 4、 $\frac{1}{2}$ 5、 $x^2 + 2y - 1$
 6、(1) $4R^2\pi(R^2 + a^2 + b^2 + c^2)$
 (2) $\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$ (3) $\frac{29\pi}{20}a^5$ (4) 34π
 (5) 不包围原点 0, 包围原点时 4π

- 7、-24

第 10 章 无穷级数

10.1 常数项级数的概念与性质

- 1、(1) 收敛, 2 (2) 发散 2、(1) 发散 (2) 收敛
3、(1) 收敛 (2) 发散 (3) 收敛 (4) 发散

10.2 常数项级数的审敛法

- 1、(1) 发散 (2) 收敛 (3) 收敛 (4) 收敛
(5) 收敛 (6) 当 $0 < a \leq 1$ 时发散 当 $a > 1$ 时收敛
2、(1) 收敛 (2) 收敛 (3) 收敛
3、(1) 收敛 (2) 发散 (3) 当 $b < a$ 时收敛 当 $b > a$ 时发散
4、(1) 条件收敛 (2) 绝对收敛 (3) 绝对收敛
(4) 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛 当 $p > 1$ 时绝对收敛
(5) 条件收敛

10.3 幂级数

- 1、(1) $R=1$ $(-1,1)$ (2) $(-\infty, +\infty)$ (3) 绝对收敛
2、(1) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (2) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (3) $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$
3、(1) $\frac{2x}{(1-x^2)^2}, x \in (-1,1)$
(2) $\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - x, x \in (-1,1)$

10.4 将函数展开成幂级数

- 1、(1) $\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!} \quad -\infty < x < +\infty$

$$(2) (1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n} \quad -1 < x \leq 1$$

$$(3) \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1} \quad -1 < x < 1$$

$$2、\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n, -1 < x < 3$$

$$3、\ln(3+x) = \ln 4 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{4^{n+1}(n+1)}(x-1)^{n+1}, -3 < x \leq 5$$

$$4、\sin x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{(x + \frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sqrt{3} \frac{(x + \frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!} \right] \quad -\infty < x < +\infty$$

10.5 傅里叶级数

$$1、0 \quad \frac{\pi^2 + \pi}{2} \quad \frac{\pi^2}{4}$$

$$2、f(x) = 3x^2 + 1 = \pi^2 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2} (-1)^n \cos nx \quad -\infty < x < +\infty$$

$$3、x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$4、\text{正弦级数: } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nx, 0 < x \leq \pi \text{ 且 } x \neq h$$

$$\text{余弦级数: } f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nh}{n} \cos nx, 0 \leq x \leq \pi \text{ 且 } x \neq h$$

10.6 一般周期函数的傅里叶级数

$$1、f(x) = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x \quad x \in [-1,1]$$

2、 正弦级数: $x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2]$

第 11 章 复变函数与解析函数

10.7 总习题

- 1、 (1) 8 (2) 2 (3) $-\ln(1-x)$ ($-1 \leq x < 1$)
 (4) $2e$ (5) $-\frac{3}{4}\pi$, $\frac{2}{3} - \frac{2}{9\pi}$
- 2、 (1) B (2) B (3) A (4) C (5) B
- 3、 (1) 发散 (2) 收敛 (3) 当 $0 < a < 1$ 时收敛, 当 $a > 1$ 时发散,
 当 $a = 1$ 时, $s > 1$ 收敛, $0 < s \leq 1$ 发散
- 4、 (1) 绝对收敛 (2) 条件收敛
- 5、 (1) $\frac{2x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2)$ $x \in (-1, 1)$ (2) $\frac{2x}{(1-x)^3}$ $x \in (-1, 1)$
- 6、 $\frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2$
- 7、 (1) $\ln(1+x-2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n$ $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$
 (2) $\frac{1}{2x^2+x-3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{5} \left[\frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \right] (x-3)^n$ $1 < x < 5$
- 8、 (1) $x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos nx$ $x \in (0, \pi)$
 (2) $x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx$ $x \in (0, \pi)$
- 9、 $f(x) = \frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ $x \in (0, \pi]$, $\frac{\pi}{4}$
- 10、 提示: 在 $x_0 = 0$ 处展开成一阶泰勒级数

11.1 复数及其运算

- 1、 (1) $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$
 (2) $-\frac{7}{2} - 13i$ (3) $-8i$
- 2、 (1) A (2) D
- 3、 $\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right]$
- 4、 $w_0 = \sqrt[6]{2} e^{-\frac{\pi}{12}i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$
 $w_1 = \sqrt[6]{2} e^{\frac{7\pi}{12}i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$
 $w_2 = \sqrt[6]{2} e^{\frac{5\pi}{4}i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

11.2 复数函数

- 1、 $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$ 2、 $-\frac{1}{2}$ 3、 除 $z = \pm i$ 外处处连续

11.3 解析函数

- 1、 (1) $3z^2 + 2i$ (2) $-i, 0, i$.
- 2、 (1) A (2) C
- 3、 $l = -3, m = 1, n = -3$
 $f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2) = z^3i$ $f'(z) = 3z^2i$
- 4、 仅在 $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$ 上可导, 处处不解析

11.4 初等函数

(1) $\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

(2) $e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} [\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})]$

第 12 章 复变函数的积分

12.1 复数函数积分的概念

1、(1) $6 + \frac{26}{3}i$ (2) $6 + \frac{26}{3}i = \frac{1}{3}(3+i)^3$

2、 $-\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$ 3、 $\frac{2}{3}(1+i)$

12.2 基本积分定理

1、0 2、0 3、0 4、 $-\frac{1}{2}\sin\pi^2$

12.3 基本积分公式

1、(1) $2\pi i$ 2、 $2\pi i e^{-1} - \pi i e^{-\frac{1}{2}}$ 3、0

4、当 $|\alpha| > 1$ 时等于 0 当 $|\alpha| < 1$ 时等于 $-\pi i e^{\alpha}$

第 13 章 复变函数的级数与留数定理

13.1 复变函数项级数

1、(1) $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $R = 1$ (3) $R = 1$

2、(1) D (2) A

13.2 泰勒级数

1、(1) $f(z) = \frac{1}{i}z + z^3 - \frac{1}{i}z^4 + \dots \quad |z| < 1$

(2) $f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < 1$

2、 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n \quad |z-2| < 3$

13.3 洛朗级数

1、 $f(z) = -\frac{2}{z} - 4 - \frac{4}{3}z - \dots \quad 0 < |z| < +\infty$

2、 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+2}} \quad 2 < |z| < +\infty$

3、 $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-2} \quad 0 < |z| < 1$

4、 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^{n-2} \quad 0 < |z-1| < 1$

5、 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+3}} \quad 1 < |z-1| < +\infty$

13.4 留数与留数定理

1、(1) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (2) 2, 1

2、(1) A (2) B (3) C (4) C

3、(1) $2\pi i$ (2) $-\frac{\pi}{2}i$

复变函数总习题

1、(1) $5^{\frac{1}{6}} e^{i \frac{\arctan 2 + (2k-1)\pi}{3}}$ $k = 0, 1, \dots$ (2) $-8i$

(3) $\ln 3 + i(2k\pi - \frac{\pi}{2})$ $k = 0, \pm 1, \dots$ (4) $e^{-(2k\pi + \frac{\pi}{2})}$ $k = 0, \pm 1, \dots$

(5) $R = 1$ $|z - i| \leq 1$ (6) $n - m$, 极

2、(1) B (2) C (3) A (4) C

3、 $2 - 2\sqrt{3}i$

4、处处解析 $f'(z) = e^z(1+z)$

5、(1) $\sqrt{2}\pi i$ (2) $-\frac{2\pi i}{5!}$ (3) 0 (4) $-4\pi i$

6、(1) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(z-3)^{n+2}}$ $4 < |z-3| < +\infty$

(2) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{2}{z^{n+2}} \right)$ $1 < |z| < +\infty$