南京邮电大学 2018/2019 学年第二学期

《高等数学 A（下）》期末试卷（A）

院（系）________________ 班级____________ 学号____________ 姓名____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得分											

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得 分

一、选择题（本大题分 5 小题，每题 3 分，合计 15 分）

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 ( )

(A) 连续，偏导数存在 (B) 连续，偏导数不存在

(C) 不连续，偏导数存在 (D) 不连续，偏导数不存在

2．曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 ( )

(A) $2x+y-4=0$ (B) $2x+y+4=0$

(C) $4x+2y+z-8=0$ (D) $4x+2y+z+8=0$

3．设 L 为曲线 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$ ( )

(A) $-\pi$ (B) -2π (C) π (D) 2π

4．下列级数中收敛的级数是 ( )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n+1}$

5. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则该级数在 $x=2$ 处 ( )

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 无法断定

得 分

二、填空题（本大题分 5 小题，每题 4 分，合计 20 分）

1. 方程 $y''+2y' = x^2$ 的特解形式为 $y^* =$ ______________ (不要计算系数)

2. 设 $z = f(2x, \frac{x}{y})$，其中 f 有二阶连续偏导数， 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ______________，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ ____________________

3．设 Ω 是位于锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之上、球面 $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 之内的区域，三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ 在球面坐标下化成三次积分为________________

4．设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 在 $0\le z\le h$ 之间的部分，则积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS =$ ____________

5．函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内的洛朗级数展开式为 ______________

得 分

三、（7 分） 在球面 $x^2+y^2+z^2=20$（$x,y,z\ge 0$）上求一点，使得函数 $f(x,y,z)=xyz^3$ 在该点取值最大，并求出该最大值.

得 分

四、（6 分） 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \frac{\sin x}{x} dxdy$，其中 D 是由 $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围成的有界闭区域.

得 分

五、（9 分）计算曲线积分$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$(x-1)^2+y^2=2$，取逆时针方向.

得 分

六、（10 分）计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中$\boldsymbol{\Sigma}$是抛物面$z=x^2+y^2$被平面$z=1$所截下的有限部分，取下侧.

得 分

七、（8 分）求幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$的收敛半径、收敛域与和函数.

得 分

八、(**8 分**) 将函数 $f(x)=x(0\le x\le \pi)$ 展开成以 2π 为周期的余弦级数.

得 分

九、计算下列各题（本大题分 2 题，每题 6 分，合计 12 分）

(1) 讨论复变函数 $f(z)=x^2y+ixy^2$ 的可导性与解析性.

(2) 计算复积分 $\int_C \dfrac{dz}{z(z+1)^2}$，其中 C 为正向曲线 $|z|=2$.

得 分

十、(**5 分**) 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{k^2+n^2}\right)$ 收敛.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

南京邮电大学 2018/2019 学年第二学期

《高等数学 A(下)》期末试卷（A）参考答案

一、选择题（本大题分 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.（ C ）　2.（ A ）　3.（ C ）　4.（ B ）　5.（ A ）

二、填空题（本大题分 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. $x(ax^2+bx+c)$　　2. $2f_1+\dfrac{1}{y}f_2$，$4f_{11}+\dfrac{4}{y}f_{12}+\dfrac{1}{y^2}f_{22}$

3. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}f(r^2)r^2\sin\varphi dr$　　4. πa^3h　　5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n-1}{z^{n+1}}$

三、（7 分）解　令 $F(x,y,z)=xyz^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-20)$，

由 $\begin{cases} F_x=yz^3+2\lambda x=0, \\ F_y=xz^3+2\lambda y=0, \\ F_z=3xyz^2+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=20(x,y,z\geq 0), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2\sqrt{3} \end{cases}$

由于 $f(x,y,z)=xyz^3$ 在球面第一卦限部分上最大值存在，故所求点为 $(2,2,2\sqrt{3})$，

所求最大值为 $f_{\max}=f(2,2,2\sqrt{3})=96\sqrt{3}$.

四、（6 分）解　$\iint\limits_D\dfrac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}\dfrac{\sin x}{x}dy=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx=1-\sin 1$

五、（9 分）解　记 $P=\dfrac{y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

作 $l:\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$0<r<<1$，$\theta:0\to 2\pi$

原式 $=\int_l\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{r^2}\int_l ydx-xdy=\dfrac{1}{r^2}\cdot(-2)\cdot\pi r^2=-2\pi$.

六、（10 分）解　补面 $S: z=1$，取上侧，

由高斯公式，原式= $\iint\limits_{\Sigma+S} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy - \iint\limits_{S} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=2\iiint\limits_{\Omega}zdv-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 zdz-\pi \ =\frac{2}{3}\pi-\pi=-\frac{1}{3}\pi$$

七、（8 分）解 记 $u_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=x^2$，

当 $x^2<1$ 时原级数收敛，当 $x^2>1$ 时原级数发散，所求收敛半径 $R=1$
又 $x=\pm1$ 时原级数收敛，故所求收敛域为 $[-1,1]$.

设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$， $x\in[-1,1]$， $s(0)=0$

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$s(x)=s(0)+\int_0^x s'(x)dx=\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

八、（8 分）解 将 $f(x)$ 偶延拓，再以 2π 为周期作周期延拓，由系数公式

$$b_n=0,\qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,d\cancel{x}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2},$$

由收敛定理， $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx \quad (0\le x\le\pi)$.

九、计算下列各题（本大题分 2 题，每题 6 分，合计 12 分）

(1) 解 记 $u=x^2y, v=xy^2$ 处处可微，

$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy$， $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2$， $\frac{\partial v}{\partial x}=y^2$， $\frac{\partial v}{\partial y}=2xy$，根据 $C-R$ 方程得 $x=0,\quad y=0$，

$\therefore f(z)$ 在 $z=0$ 点可导，在复平面上处处不解析.

(2) 解　记 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$　$\operatorname{Re}s[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=1$，

$$\operatorname{Re}s[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}(\frac{1}{z})'=-1$$

原式$=2\pi i\{\operatorname{Re}s[f(z),0]+\operatorname{Re}s[f(z),-1]\}=0$

十、（5 分）证明　　$0\le u_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{k^2+n^2}=a_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+n^2}\le a_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{x^2+n^2}dx$

$$=a_n\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+n^2}=\frac{a_n}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 收敛，由比较判别法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.