南京邮电大学 2019 /2020 学年第 二 学期

《 高等数学 A（I）下》测验试卷答案及评分标准

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得分											

得 分

一、选择题（本大题分 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、考虑二元函数 $z=f(x,y)$ 的下列四条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续； (2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分； (4) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 存在。

则下列选项中正确的是 (A)

(A) (2) $\Rightarrow$(3) $\Rightarrow$(1) (B) (3)$\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$(1)

(C) (3) $\Rightarrow$(4) $\Rightarrow$(1) (D) (3)$\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$(4)

2、设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极大值，则函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在 x_0 处与函数 $\psi(y)=f(x_0,y)$ 在 y_0 处 （A）

(A) 一定都取得极大值 (B) 恰有一个取得极大值

(C) 至多有一个极大值 (D) 都不能取得极大值

3、二次积分 $\int_0^{2R}dy\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}}f(x,y)dx=$ (D)

(A) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho$ (B) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho$ (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

4、函数 $z=3x^2y-y^2$ 在点 $A(1,2)$ 处沿点 A 指向点 $B(2,4)$ 方向的方向导数为 (C)

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $-2\sqrt{5}$

5、设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换二次积分 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 的积分次序为　　(B)

$(A)\ \int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$　　　　$(B)\ \int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

$(C)\ \int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dx$　　　　$(D)\ \int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

得 分

二、填空题（本大题分 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1、化三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分为 $\underline{\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz}$，其中 Ω 是由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$，$z=0$ 所围成的闭区域.

2、曲线 $\begin{cases} x=y^2 \\ z=x^2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{4}}$

3、设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$ $\underline{-\dfrac{1}{2}dx+\dfrac{1}{2}dy}$

4、函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(z^2-x^2,z^2-y^2)=0$ 所确定，其中函数 F 可微，则

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{\dfrac{xF_1'}{z(F_1'+F_2')}}$

5、函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $grad\ u\big|_M=\underline{\dfrac{2}{9}(1,2,-2)}$

得 分

三、(本题 9 分) 设 $z=f(x-2y)+g(xy,\dfrac{y}{x})$，其中函数 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'+g_1'\cdot y+g_2'(-\dfrac{y}{x^2})=f'(x-2y)+g_1'(xy,\dfrac{y}{x})y-\dfrac{y}{x^2}g_2'(xy,\dfrac{y}{x})$

……………… 4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+(g''_{11}\cdot x+g''_{12}\cdot\frac{1}{x})y+g'_1-\frac{1}{x^2}g'_2-\frac{y}{x^2}(g''_{21}\cdot x+g''_{22}\cdot\frac{1}{x})$$

…………… 3 分

$$=-2f''+g''_{11}\cdot xy+g'_1-\frac{1}{x^2}g'_2-\frac{y}{x^3}g''_{22}$$ …………… 2 分

得 分

四、(本题 9 分) 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+y)$ 的极值。

解：令 $f_x=e^{2x}(2x+2y^2+2y+1)=0$， $f_y=e^{2x}(2y+1)=0$，得驻点

$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$. -----------4 分

$A=f_{xx}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})=2e^{-\frac{1}{2}}$， $B=f_{xy}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})=0$, $C=f_{yy}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})=4e^{-\frac{3}{2}}$.

$\because A>0,\ AC-B^2>0,$ 函数 $f(x,y)$ 有极小值 $f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$. ----------5 分

得 分

五、（本题 8 分） 计算 $\iint_D e^{\frac{y}{x}}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=0,x=1$ 及曲线 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解： 原式= $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}e^{\frac{y}{x}}dy$ ……… 5 分

$$=\int_0^1([xe^{\frac{y}{x}}]_0^{x^2})dx=\int_0^1(xe^x-x)dx$$

$$=[(x-1)e^x-\frac{1}{2}x^2]_0^1=\frac{1}{2}$$ ……… 3 分

得 分

六、(本题 8 分) 计算三重积分 $\iiint_\Omega(x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 是 $z=x^2+y^2$ 及 $z=6$ 所围的区域。

解：法一： 截面法 $\Omega:\begin{cases}0\le z\le 6\\ D_z:x^2+y^2\le z\end{cases}$

原式= $\int_0^6 dz\iint_{D_z}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^6 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3 d\rho$ ……… 5 分

$$=\int_0^6(2\pi[\frac{1}{4}\rho^4]_0^{\sqrt{z}})dz=\int_0^6(\frac{1}{2}\pi z^2)dz=[\frac{1}{6}\pi z^3]_0^6=36\pi$$ ……… 3 分

法二：柱面坐标（投影法）$\Omega:\begin{cases}\rho^2 \le z \le 6 \\ 0 \le \rho \le \sqrt{6} \\ 0 \le \theta \le 2\pi\end{cases}$

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{6}} \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^{6} dz \qquad \cdots\cdots\cdots\ 5\text{ 分}$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} \rho^3 (6-\rho^2)\, d\rho$$

$$= 2\pi [\frac{3}{2}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6]_0^{\sqrt{6}} = 36\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\ 3\text{ 分}$$

得 分

七、(本题 9 分) 在已知的椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$ 内做内接长方体（各边分别平行于坐标轴），问内接长方体在第一卦限的顶点坐标如何时，该长方体的体积最大？并求最大体积。

解：设内接长方体在第一卦限的顶点坐标为 (x, y, z)，则其体积 $V = 8xyz$.问题转化

为求目标函数 $V = 8xyz$ 在约束条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (x>0, y>0, z>0)$

下的最大值。设拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1),\ (x>0, y>0, z>0)$$

$\cdots\cdots\cdots$ 3 分

令 $\begin{cases} F_x = yz + \lambda \dfrac{2x}{a^2} = 0, \\ F_y = xz + \lambda \dfrac{2y}{b^2} = 0, \\ F_z = xy + \lambda \dfrac{2z}{c^2} = 0, \\ F_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1 = 0 \end{cases}$ 解此方程组，得唯一驻点：$(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}})$.

$\cdots\cdots\cdots$ 4 分

根据问题的实际意义，内接长方体的体积最大值存在，故

$$V_{\max} = 8\frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{8}{9}\sqrt{3}abc \qquad \cdots\cdots\cdots 2\text{分}$$

得 分

八、(本题 9 分) 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积。

解：根据对称性，所求曲面面积等于其在第一卦限部分面积的 4 倍。记第一卦限部分为Σ：$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$，$(x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le ax,\ y\ge 0.$ 其面积为

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots 5\text{分}$$

使用极坐标，$D_{xy}: 0\le\rho\le a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$

$$\text{上式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sqrt{a^2-\rho^2}]_0^{a\cos\theta}d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta$$

$$=a^2(\frac{\pi}{2}-1) \qquad \cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

故所求面积为 $A_{总}=2a^2(\pi-2).$ $\cdots\cdots\cdots$ 1 分

得 分

九、(本题 8 分)计算三重积分 $\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, 其中$\Omega$是半球面 $x^2+y^2+z^2=2z(z\ge 1)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的区域。

解：利用球坐标：$\Omega:\begin{cases}0\le r\le 2\cos\varphi,\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3dr$ ········ 5 分

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi$

$=8\pi[-\frac{1}{5}\cos^5\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8-\sqrt{2}}{5}\pi$ ········ 3 分

得 分

十、(本题 5 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 恒大于零，$\int_a^b f(x)dx=A.$

证明： $\int_a^b f(x)e^{f(x)}dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)(b-a+A).$

证明：化为二重积分证明：

左边$=\int_a^b f(x)e^{f(x)}dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)e^{f(x)}dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy$

$=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}e^{f(x)}\,dxdy$

其中 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,\ a\le y\le b\}$， 记 $F(x,y)=\frac{f(x)}{f(y)}e^{f(x)}$，

因为区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，所以有 $\iint_D F(x,y)\,dxdy=\iint_D F(y,x)\,dxdy$，

即 左边$=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}e^{f(x)}\,dxdy=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}e^{f(y)}\,dxdy$

$=\frac{1}{2}\iint_D[\frac{f(x)}{f(y)}e^{f(x)}+\frac{f(y)}{f(x)}e^{f(y)}]dxdy$ · · · · · · · · · 3 分

$\ge\iint_D e^{\frac{f(x)+f(y)}{2}}\,dxdy$

$\ge\iint_D[1+\frac{f(x)+f(y)}{2}]dxdy=(b-a)^2+\int_a^b dy\int_a^b f(x)dx$

$=(b-a)(b-a+A)=$右边. · · · · · · · · · 2 分

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装 订 线 内 不 要 答 题