自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

南京邮电大学 2020/2021 学年第二学期

《 高等数学 A （I）下》期末试卷（A）

专业_______________ 班级___________ 学号___________ 姓名___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得分											

得 分

一、选择题（本大题分 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=9$，计算曲面积分$\iint_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}S=$ （　）

(A) 9π　(B) 27π　(C) 54π　(D) 108π

2、考虑二元函数$z=f(x,y)$的下列四条性质：

(1) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续；　(2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)连续；

(3) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微分；　(4) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$存在。

则下列选项中正确的是 （　）

(A) (2) $\Rightarrow$(3) $\Rightarrow$(1)　(B) (3)$\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$(1)

(C) (3) $\Rightarrow$(4) $\Rightarrow$(1)　(D) (3)$\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$(4)

3、累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$可以化为 （　）

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

4、关于复变函数$f(z)=x^2-iy$，下列叙述正确的是： （　）

(A) 复平面内处处解析　(B) 在直线$z=-\frac{1}{2}+iy$上处处解析

(C) 复平面内没有可导点　(D)在直线$z=-\frac{1}{2}+iy$上处处可导

5、下列级数中收敛的级数为 （　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n}$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n}{n+1})^n$

得 分

二、填空题（本大题分 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1、曲面$x^2y+\ln(1+z)-\cos z=1$在点$(1,2,0)$处的切平面方程为______________.

2、求函数$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点$M(1,2,-2)$处的梯度$\mathbf{grad}\,u|_M=$________.

3、设L是原点$O(0,0)$到点$A(-2,-3)$的直线段，则曲线积分$\int_L (x+y)^2\,\mathrm{d}s=$________.

4、设$f(x,y)$是连续函数，交换二次积分$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$的积分次序为______________.

5、设Ω：$x^2+y^2+z^2\le 4z$，则在球面坐标下化三重积分$\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为三次积分为______________.

得 分

三、(本题 8 分)

若$z=f(x-2e^y)+g(xy,\frac{y}{x})$，其中函数$f(t)$二阶可导，$g(u,v)$具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

得 分

四、(本题 8 分)

计算二重积分$\iint_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$是区域$x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0$.

得 分

五、(本题 7 分) 证明曲线积分

$\int_L (2xy^2 - y^3\cos x + 2)\,\mathrm{d}x + (1 - 3y^2\sin x + 2x^2 y)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，并计算此曲线积分，其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上由点 $O(0,0)$ 到点 $A(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.

得 分

六、(本题 9 分)

计算 $\iint\limits_{\Sigma} (2y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (2x+3z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + 3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \ge 0)$ 的上侧.

得 分

七、(本题 7 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ 的收敛域与和函数.

得 分

八、(本题 7 分)将 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & 0 \le x \le \pi, \\ 1-x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

得 分

九、本大题分两小题（每题 7 分，共 14 分）

1、将 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在区域 $2 < |z| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

2、 计算复积分 $\oint_C \dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z| = 2$.

得 分

十、(本题 5 分) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x$，(1)求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值；(2) 证明：对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.