复变函数

- 复变函数与解析函数
- 复变函数的积分
- 复变函数的级数与留数定理

第11章 复变函数与解析函数

11.1、复数及其运算

一、复数及其表示法

1、复数的定义

(1) 虚数单位 $\quad i^2=-1$

(2)复数的定义

对任何实数x,y,称$z=x+yi$复数，x 和y 分别称为z 的实部和虚部．记作 $x=\mathrm{Re}(z)$, $y=\mathrm{Im}(z)$

当$x=0$时,$z=iy$称为纯虚数;当$y=0$时,$z=x$为实数。

注：1、由定义知，复数是实数的推广；

2、两个复数相等，当且仅当其实部和虚部分别相等;

3、$z=0$等价于$x=0$且$y=0$；

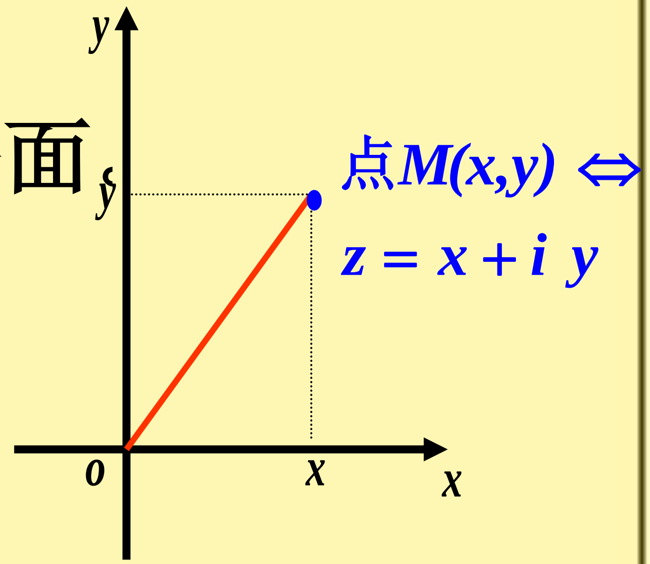
4、两个复数不能比较大小。

2、复数的几何意义

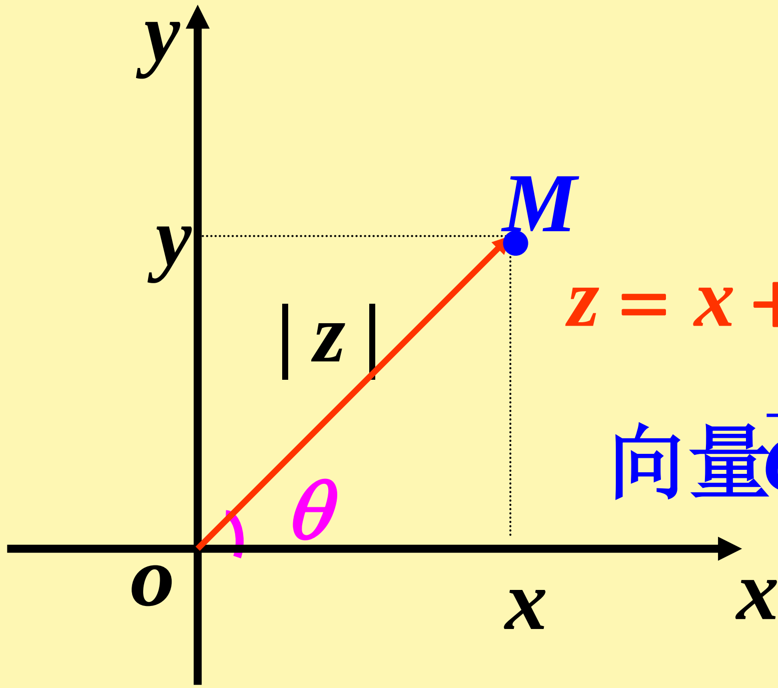
(1) 复平面 在平面上取定直角坐标系 xoy，用横坐标轴上的点 x 表示复数的实部，此坐标轴称为实轴；用纵坐标轴上的点 y 表示复数的虚部，此坐标轴为虚轴。

上述表示复数的平面称为复平面，

这样，平面上的点 $M(x,y)$ 与复数 $z = x + iy$ 之间建立了一一对应的关系



复数 z 也可以用向量 $\overrightarrow{OM}$ 来表示,且



$z = x + iy$

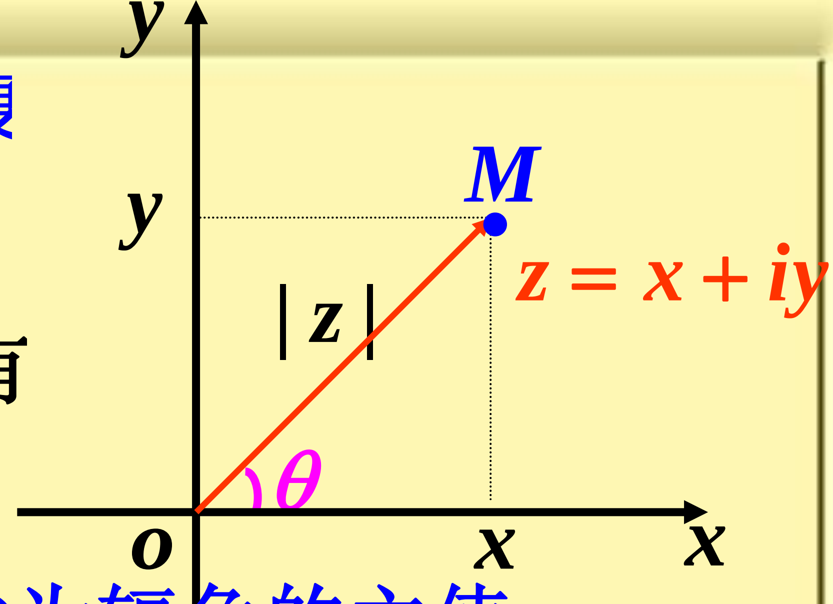
向量 $\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow z = x + iy$

向量 $\overrightarrow{OM}$ 的长度称为复数 z 的模,记作 $|z|$。

显然: $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

注: $z = \infty \Leftrightarrow |z| = \infty$

$\overrightarrow{OM}$与x轴正向的夹角称为复数的辐角记作Arg z。



显然,复数$z(z \neq 0)$的辐角有无穷多个,

称$\theta = \arg z \ \ (-\pi < \arg z \leq \pi)$为辐角的主值,

复数z的辐角满足:

(1) $\mathrm{Arg}\ z = \arg z + 2k\pi$ (k为整数)

(2) 复数$z = 0$的辐角不确定

(3) $\tan(Argz) = \dfrac{y}{x}$

α / 函数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

例 $z = -\sqrt{3} - i$ 则 $|z| = 2$, $\arg z = -\dfrac{5\pi}{6}$

3、复数的三种表示法

(1)代数式 $z = x + iy$

运用变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\Downarrow$

(2)三角式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r = |z|, \theta = \arg z)$

运用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\Downarrow$

(3)指数式 $z = r\,e^{i\theta}$

例 $z = -\sqrt{3} - i$ 则 $|z| = 2, \quad \arg z = -\dfrac{5\pi}{6}$

$$z = 2[\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})] = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$$

二、复数的运算

1、复数的代数形式的四则运算

设复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$

(1) $z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$

(2) $z_1 \times z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$

(3) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

2、共轭复数

定义:实部相同而虚部相反的两个复数称为共轭复数设 $z = x + iy$,则共轭复数 $\bar{z} = x - iy$

3、复数的三角、指数形式的运算

设 $z_i = r_i(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)\ ,i = 1,2$

(1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

(2) $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

(3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

(4) 开方运算：

问题:给定复数$z=re^{i\theta}$，求所有的满足$\omega^n=z$ 的复数ω

当$z\neq 0$时，有n个不同的ω值与 z相对应，每一个这样的ω值都称为z 的n次方根， 记为$\omega=\sqrt[n]{z}$

设 $\omega=\rho e^{i\varphi}$, 由 $\omega^n=z$, 有 $\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}$

$$\Rightarrow \rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi \quad (k\in Z)$$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

即：$\omega=\sqrt[n]{z}=|z|^{\frac{1}{n}}[\cos(\frac{\arg z+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\arg z+2k\pi}{n})]$

$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

例1 若 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$， 求 $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)$,和$z\bar{z}$

解 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\quad=-\frac{i}{i\cdot i}-\frac{3i\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}$

$$=i-\frac{3i-3}{2}\quad=\frac{3}{2}-\frac{i}{2}$$

$$\therefore R(z)=\frac{3}{2}\qquad \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$$

$$z\bar{z}\quad=(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2\quad=\frac{5}{2}$$

例2 将下列复数化为三角式或指数式

$$(1)\ i \quad (2)\ -1 \quad (3)\ 1+\sqrt{3}\,i \quad (4)\ \frac{2i}{-1+i}$$

解(1) $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

(2) $-1 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$

(3) $1+\sqrt{3}\,i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

(4) $\dfrac{2i}{-1+i} = \dfrac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = (1-i)$

$$= \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

例3 求下列各复数的值

(1) $(\sqrt{3}-i)^5$ (2) $\sqrt[4]{i}$

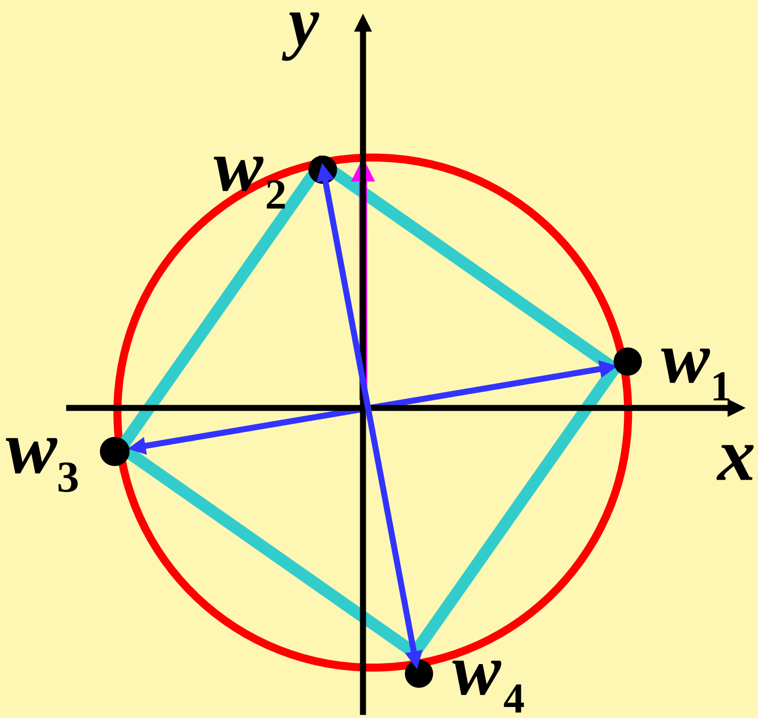
解 (1) $(\sqrt{3}-i)^5 = (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^5 = 32e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

$$= 32(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}) = 32(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$= -16(\sqrt{3}+i)$$

(2) $\sqrt[4]{i} = 1^{\frac{1}{4}}[\cos(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4})]$

$(k = 0, 1, 2, 3)$



$$w_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$$

$$w_3 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$$

$$w_4 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$$

i开4次方的几何意义

$\sqrt[4]{i}$ 的四个值是以原点为中心,以1 为半径的圆的内接正四边形的四个顶点。

三、平面曲线的复数方程

1、曲线方程的定义

在复平面上，复变量满足的方程式称为曲线的复数方程。

例 $|z-z_0|=R$ 表示以点 z_0 为圆心，以 R 为半径的圆

定义 设曲线 C 的实参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

以 $x=x(t)$ 为实部，以 $y=y(t)$ 为虚部，则

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

叫做曲线 C 的复参数方程。

2、常见曲线的复数形方程

(1) 以点(a,b)为圆心，以R为半径的圆:

$$|z-(a+bi)|=R \quad \text{或} \quad |z-z_0|=R$$

或$z-z_0=R(\cos\theta+i\sin\theta)=Re^{i\theta}$(复参数方程）

等价形式: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$$\begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta \end{cases}$$

(2) 平行于虚轴的直线 $\mathrm{Re}(z)=a$

等价形式: $x=a$

(3) 平行于实轴的直线 $\mathrm{Im}(z)=b$

等价形式: $y=b$

11.2、复变函数

11.2.1、复变函数的概念

1、定义

定义11.2.1 设G是复数z的某个集合，如果有一个确定的法则，对于G中每个$z=x+iy$，都有一个或几个复数$w=u+iv$与之对应，则称w为z的复变函数，记为 $w=f(z)$。（其中x,y,u,v都是实数）

$$\text{复数集合}G \xrightarrow{\text{映射 } f} \text{函数值集合}G^*$$

z的集合G(定义集合)，若构成区域，则称G为定义域。

由$w=f(z)$所确定的所有w值的集合G^*，若构成区域，则称G^*为值域。

如果每个z值对应唯一的一个w值,则称

$w=f(z)$是单值函数;

如果每个z值对应至少两个w值,则称

$w=f(z)$是多值函数.

例如 $w=z^3-1$是单值函数,

$w=\operatorname{Arg} z$是多值函数.

2、复变函数与实变函数

复变函数可以化为二元实函数去研究。

例如 复变函数 $w=z^3-1$ 若令$z=x+iy$,则

$$w=z^3-1=(x+iy)^3-1$$

$$=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i-1=u+vi$$

$$\therefore w = z^3 - 1 \Rightarrow \begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 - 1 \\ v = 3x^2y - 3y^3 \end{cases}$$

即复变函数$w = z^3 - 1$对应了两个以x, y为自变量的二元实函数

3、映射----复变函数的几何意义

如果用z平面上的点表示自变量z的值，而用另一个平面—w平面上的点表示复函数w的值，那么函数$w=f(z)$在几何上就可以看做是把z平面上的一个点集G(定义集合)变到w平面上的一个点集G^*(函数值集合)的映射。

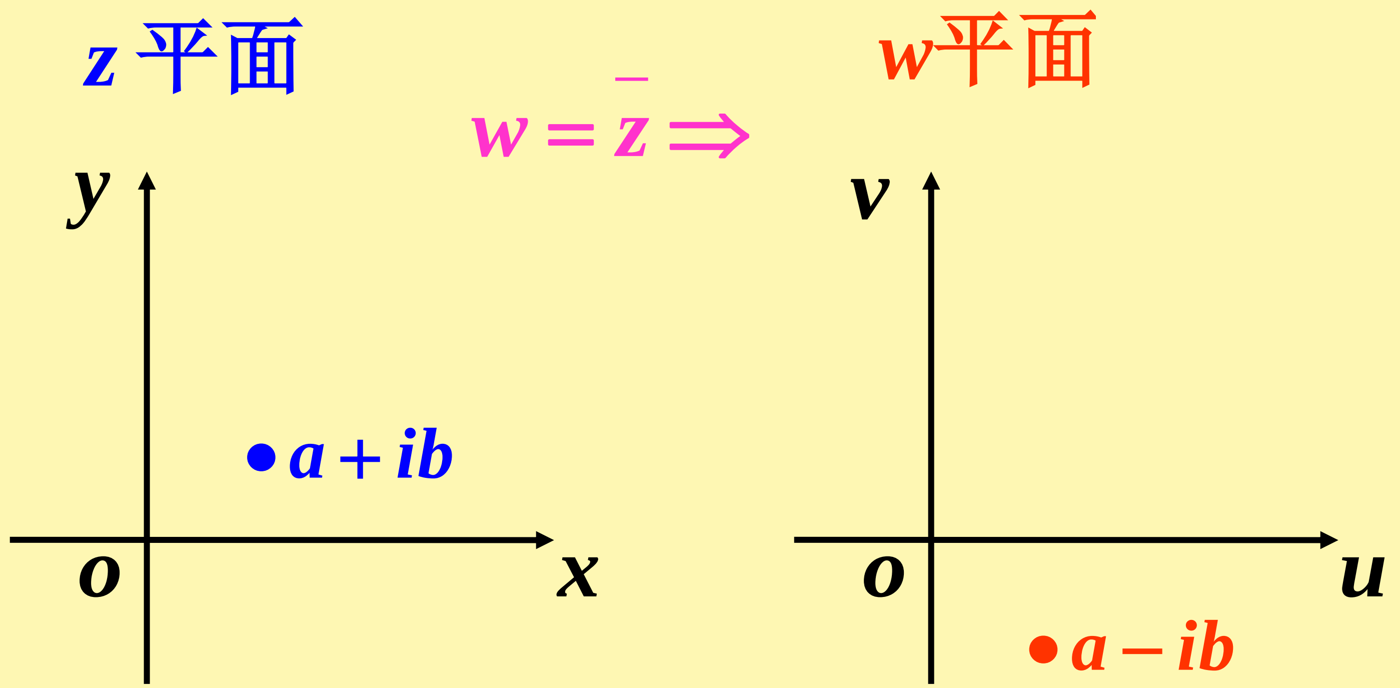
如果G中的点z被映射$w=f(z)$映射成G^*中的点w，那么w称为z的象(映象)，而z 称为w的原象。

一般地，映射$w=f(z)$

(1)将z 平面上的点映射成w 平面上的点；

例如 映射 $w=\bar{z}$ 将z平面上的点$z=a+ib$

映射成w平面上的点$w=a-ib$。

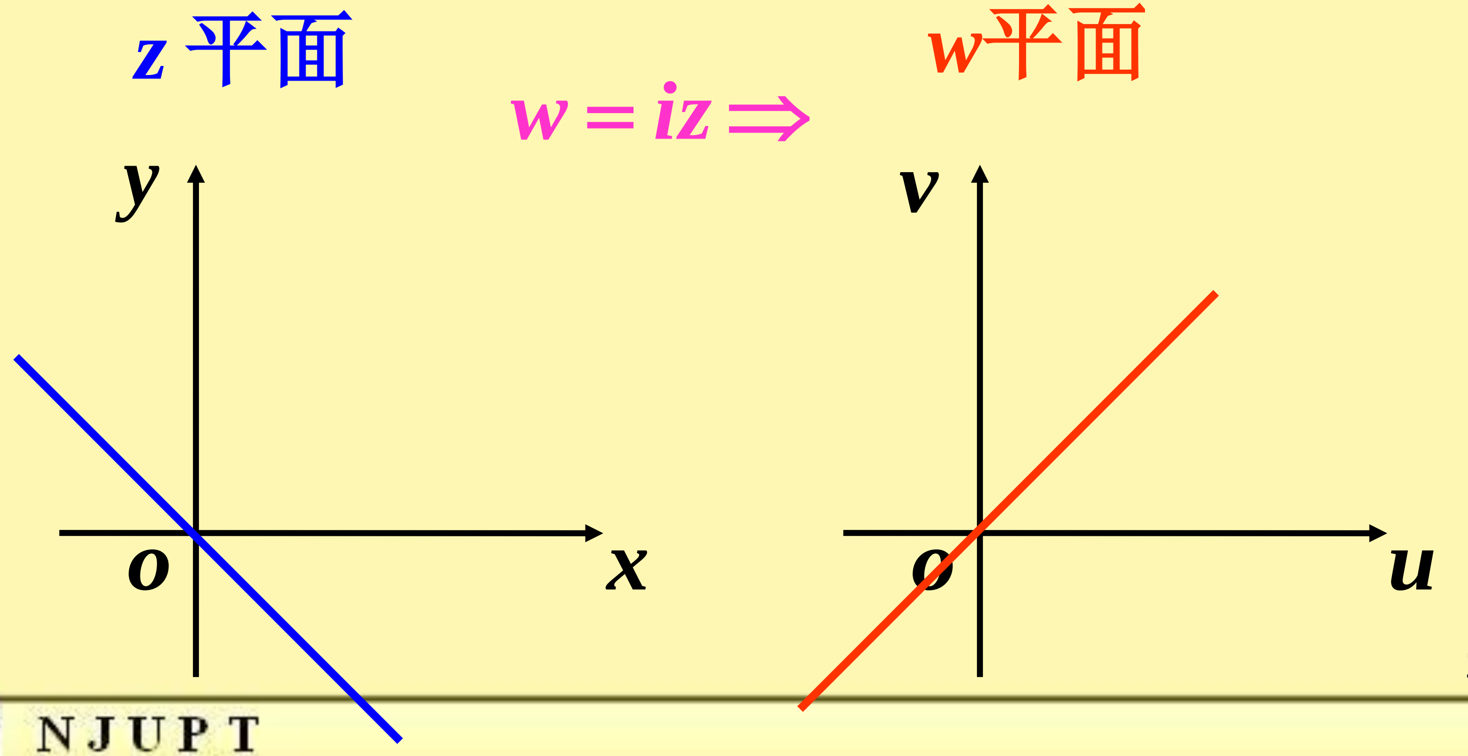


(2)将z平面上的曲线映射成w平面上的曲线

例如 映射 $w=iz$ 将z平面上的曲线: $y=-x$

映射成w平面上的曲线$u=v$。

$$(\,w=iz=i(x+iy)=-y+ix=u+iv,\Rightarrow u=v)$$

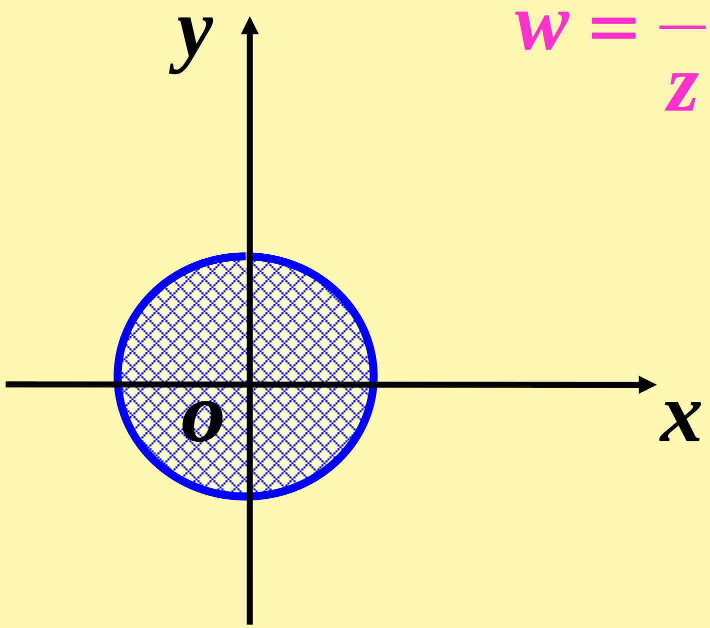


(3)将z 平面上的区域映射成w 平面上的区域

例如 映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 将z平面上的区域$|z|<1$

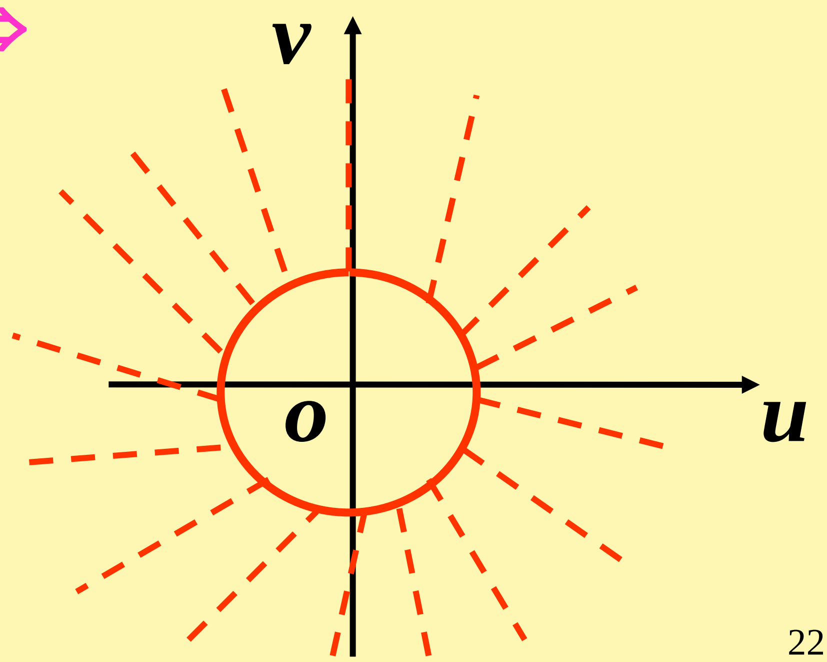
映射成w平面上的区域 $|w|>1$。

z 平面



$w=\dfrac{1}{z}\Rightarrow$

w平面



11.2.2、复变函数的极限与连续性

1、复变函数的极限

1)、复变函数的极限的定义

定义11.2.2 设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的某去心邻域

（$0 < |z - z_0| < \delta_1$）内有定义，如果有一确定的数 A 存在，对于任意的给定的 $\varepsilon > 0$，相应地必有一正数 δ，使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - A| < \varepsilon$

那么称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，

记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$，

或记作当 $z \to z_0$ 时，$f(z) \to A$。

2)、复变函数极限存在的充要条件

定理11.2.1 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0$,

复常数$A=u_0+iv_0$,那么$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$的充要

条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$

3)、复变函数极限的运算法则

定理11.2.2 设$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$和$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$存在,则有:

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=[\lim\limits_{z\to z_0} f(z)]\cdot[\lim\limits_{z\to z_0} g(z)]$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$(其中$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\neq 0$)

例1 下列极限是否存在? 若存在, 试求极限值.

1、 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ 解 设 $z=x+iy$, 则

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}=\lim_{z\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

所以 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ 不存在。

2、 $\lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{z-2i}{z(4+z^2)}$

解 原式 $=\lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{(z-2i)}{z(z+2i)(z-2i)}=\lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{1}{z(z+2i)}=-\dfrac{1}{8}$

2、复变函数的连续性

1)、连续性的定义

定义11.2.3 设$f(z)$在z_0邻域内有定义，并且

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0),$$ 则称$f(z)$在z_0处连续。

如果$f(z)$在区域D内每一点都连续，那么称$f(z)$在区域D内连续，或说$f(z)$是D上的连续函数。

2)、连续的充分必要条件

定理11.2.3 函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在 $z_0=x_0+iy_0$处连续的充要条件是$u(x,y)$和 $v(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续。

3)、连续函数的运算

定理11.2.4

(1)连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数。

(2)连续函数的复合函数仍是连续函数。

由以上讨论$\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面内是连续的；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面内除分母为0点外处处连续

例 2 试讨论下列函数的连续性。

1、$f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$　在复平面上处处连续

2、$f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$　　除 $z = \pm i$ 外处处连续

3、证明 $f(z)=\arg z$ 在原点及负实轴上不连续。

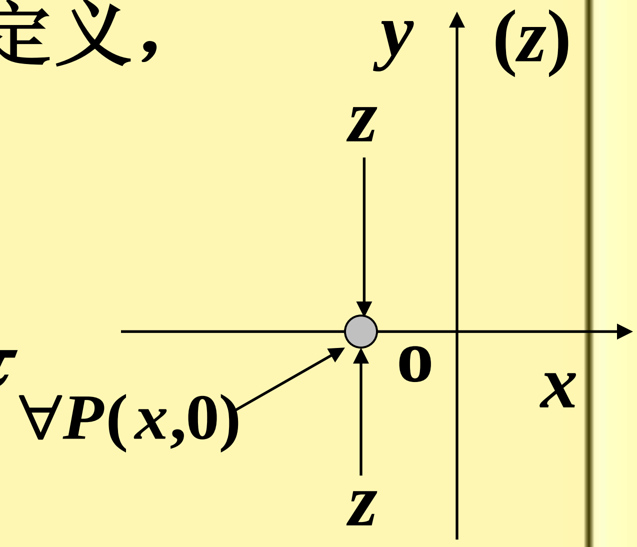
证明　(1) $\because\ f(z) = \arg z$ 在原点没有定义，

故不连续。

(2) 在负实轴上，$\forall P(x,0)(x<0)$

$\because\ \lim\limits_{y\to 0^+} \arg z = \pi \quad \lim\limits_{y\to 0^-} \arg z = -\pi$

$\therefore\ \arg z$ 在负实轴上不连续。



内容小结

1、复数及其表示法

①定义　　②几何意义:复平面（点、向量）

③三种形式及互化(模、辐角）

2、复数的运算

①代数形式(加、减、乘、除)

②三角(指数）形式(乘、除、乘方、开方)

③共轭复数、模

3、平面曲线的复数形方程

4、复变函数 ①复变函数的定义

②复变函数与实变函数

③映射−−几何意义

5、复变函数的极限 ①极限的定义

②极限存在的充要条件

③极限运算法则

6、复变函数的连续性 ①连续的定义

②函数连续的充要条件

③连续函数的运算性质

作业:11-1,11.2