11.2　复变函数（续）

11.2.1、复变函数的概念

11.2.2、复变函数的极限与连续性

11.3　解析函数

11.4　初等函数

11.2.2、复变函数的极限与连续性

1、复变函数的极限

1)、复变函数的极限的定义

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A,\ \text{或记作当} z \to z_0 \text{时}, f(z) \to A。$$

2)、复变函数极限存在的充要条件

设$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$的充要

条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$

3)、复变函数极限的运算法则

2、复变函数的连续性

1)、连续性的定义

定义11.2.3 设$f(z)$在z_0邻域内有定义，并且

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$ 则称$f(z)$在z_0处连续。

如果$f(z)$在区域D内每一点都连续，那么称$f(z)$在区域D内连续，或说$f(z)$是D上的连续函数。

2)、连续的充分必要条件

定理11.2.3 函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在

$z_0 = x_0 + iy_0$处连续的充要条件是$u(x,y)$和

$v(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续。

3)、连续函数的运算

定理11.2.4

(1)连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数。

(2)连续函数的复合函数仍是连续函数。

由以上讨论$\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面内是连续的;

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面内除分母为0点外处处连续

例2 试讨论下列函数的连续性。

1、$f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ 在复平面上处处连续

2、$f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$ 除$z=\pm i$外处处连续

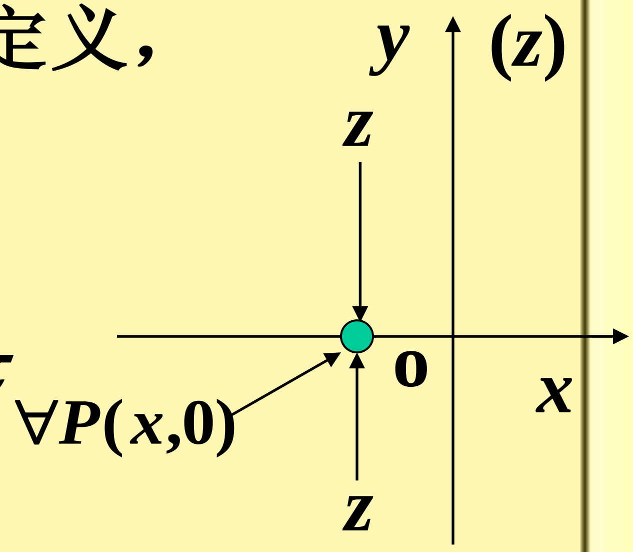
3、证明$f(z)$=argz在原点及负实轴上不连续。

证明 (1) $\because\ f(z)=\arg z$在原点没有定义，

故不连续。

(2)在负实轴上$\forall P(x,0)(x<0)$

$\because \lim\limits_{y\to 0^+}\arg z=\pi \quad \lim\limits_{y\to 0^-}\arg z=-\pi$



$\therefore \arg z$在负实轴上不连续。

11.3、解析函数

11.3.1、复变函数的导数与微分

1、导数的定义

定义11.3.1 设函数$w=f(z)$定义于区域D, z_0为D中的一点,点$z_0+\Delta z\in D$。如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,那么就说$w=f(z)$在$z=z_0$处可导。

这个极限值称为$w=f(z)$在$z=z_0$处的导数,记作:

$$f'(z_0)=\frac{dw}{dz}\bigg|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}。$$

2、导函数的定义

若函数$w=f(z)$在区域D内的每一点都可导

则称函数$w=f(z)$在区域D内处处可导。

$$f'(z)=\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

是$w=f(z)$在区域D内的导函数.

3、可导与连续的关系

可导必连续，反之，连续不一定可导。

例3 讨论函数$f(z)=x+2yi=z+i\mathrm{Im}z$是否连续，可导？

解 $$\because \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{x+\Delta x+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\begin{cases}1 & \text{当}\Delta y=0,\Delta x\to 0\text{时}\\ 2 & \text{当}\Delta x=0,\Delta y\to 0\text{时}\end{cases}\quad\therefore\text{不}\exists!$$

故函数处处不可导

函数$f(z)=x+2yi$在复平面上处处连续，但处处不可导

3、求导公式与法则

(1) $c'=(a+ib)'=0$.   (2) $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n是正整数).

(3) 设函数$f(z)$, $g(z)$ 均可导，则

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z),$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)},(g(z)\neq 0)$$

(4)复合函数的导数 $[f(g(z))]'=f'(w)g'(z)$，其中$w=g(z)$

(5) 反函数的导数 $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$，其中: $w=f(z)$

与$z=\varphi(w)$互为单值的反函数，且$\varphi'(w)\neq 0$。

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面上处处可导;

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面上（除分母为0点外）处处可导.

例4 已知 $f(z)=(z^2+5z)^2-\dfrac{1}{z-1}$，求$f'(z)$

解 $$f'(z)=2(z^2+5z)(2z+5)+\frac{1}{(z-1)^2}$$

11.3.2、解析函数

1、解析函数的定义

定义11.3.2 如果函数 $f(z)$在 z_0及 z_0的邻域内处处可导,那么称 $f(z)$在 z_0解析。

如果 $f(z)$在区域D内每一点解析,那么称 $f(z)$在D内解析,或称 $f(z)$ 是D内的一个解析函数。**(全 纯函数或正则函数)**

如果 $f(z)$ 在 z_0处不解析,那么称z_0是 $f(z)$的奇点。

注:由定义可知函数在区域内解析与在区域内可导是等价的,但在一点解析与可导不同

2、解析函数的运算

定理11.3.1 (1) 在区域内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母零的点)在 D 内解析。

(2) 设函数 $h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析。那么复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内解析。

由以上讨论⇒

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$是整个复平面上的解析函数；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$是复平面上（除分母为0点外）的解析函数.

例如

- $w=z^2$ 在整个复平面处处可导，故是整个复平面上的解析函数；
- $w=1/z$，除去$z=0$点外，是整个复平面上的解析函数；
- $w=\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$ 除$z=0,z=\pm i$外，处处解析
- $w=x+2yi=z+i\mathrm{Im}z$在整个复平面上处处不解析(见例3)。

3、函数解析的充分必要条件

定理11.3.2 设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$定义在区域D内, $f(z)$在D内一点$z=x+iy$可导的充要条件是:

$u(x,y)$与$v(x,y)$在点(x,y)可微,并且

在该点满足柯西−−黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

上述条件满足时,有

$$f'(z)=u_x+iv_x$$

定理11.3.3 函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析的充要条件是:

$u(x,y)$与$v(x,y)$在D内可微,并且满足

柯西－－黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

注:定理提供了判别函数解析性的方法及如何求$f(z)$的导数值.

使用时: i)判别$u(x,y)$，$v(x,y)$可微（偏导数的连续性)

ii) 验证C-R条件.

iii)求导数: $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

例 4 判定下列函数在何时可导?何处解析?

并在可导处求出导数。

(1) $\because f(z)=(x^3-y^3)+i2x^2y^2$

解 $u(x,y)=x^3-y^3,\ v(x,y)=2x^2y^2$

$\therefore \dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2,\quad \Rightarrow u(x,y)v(x,y)$可微,

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=4xy^2,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=4x^2y,$ 仅在$(0,0)$和$(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4})$时才满足$C-R$方程,

因此$f(z)$仅在$z=0$和$z=\dfrac{3}{4}(1+i)$处可导,处处不解析。

$$f'(z)\Big|_{z=0}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$f'(z)\Big|_{z=\frac{3}{4}(1+i)}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{27}{16}(1+i)$$

(2) $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

解 $u(x,y)=e^{x}\cos y,\ v(x,y)=e^{x}\sin y$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y,$$

$\Rightarrow u(x,y)v(x,y)$可微,且处处满足$C-R$方程,

因此$f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

在整个复平面上处处可导,处处解析。

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y=f(z)$$

(3) $f(z)=2x^3+3y^3 i$

解 $u(x,y)=2x^3$, $v(x,y)=3y^3$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=9y^2 \quad \Rightarrow u(x,y)v(x,y)\text{可微},$$

仅在$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$才满足$C-R$方程,

$f(z)$在$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$ 处可导,处处不解析。

11.4、初等函数

11.4.1、指数函数

(1)复指数函数的定义

$$w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

(2)复指数函数的性质:

① e^z的定义域是全平面$|z| < +\infty$

$$|e^z| = e^x, \mathrm{Arg}\, e^z = y + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

② 在复平面上处处解析且

$$(e^z)' = e^z$$

③ 加法定理 $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$ $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$

④ e^z是以$2\pi i$为周期的周期函数,且有

$$e^{z+2k\pi i}=e^z \quad (k\in Z)$$

事实上, $f(z+2k\pi i)=e^{z+2k\pi i}=e^z e^{2k\pi i}$

$$=e^z(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)=e^z=f(z)$$

$\therefore T=2k\pi i$ k为$\forall$整数.

⑤ e^z可以取负值,且对任何复数z,都有

$$e^z\neq 0$$

注: 这两个性质是实变指数函数所没有的。

例1 计算下列各函数值

(1) $e^{-\frac{\pi}{3}i}$ (2) $e^{2+i\pi}$

解(1) $e^{-\frac{\pi}{3}i}=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2) $e^{2+i\pi}=e^{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^{2}$

11.4.2、对数函数

(1)复对数函数的定义

把满足方程$e^w = z\ (z \neq 0)$的函数$w = f(z)$称为对数函数,记作$w = \mathrm{Ln}(z)$。

令 $w = u + iv,\ z = re^{i\theta}$,则 $e^{u+iv} = re^{i\theta}$

所以 $u = \ln r$, $v = \theta$

因此 $w = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$

由于$\mathrm{Arg}\,z$为多值函数,所以对数函数

$w = f(z)$为多值函数,并且每两个值相差$2\pi i$

的整数倍,记作 $\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

如果规定上式中的Arg z取主值arg z,那么Ln z为一单值函数,记作ln z,称为Ln z的主值。

即: $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

则 $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$

特别,当$z = x > 0$时,Ln z的主值$\ln z = \ln x$,就是实变数对数函数。

(2)复对数函数的性质

1)定义域是除去$z=0$的整个平面,即 $0<|z|<+\infty$

2) $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$ $\quad Ln\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$

3)负数的对数存在

4) $\mathrm{Ln}\,z$的各个分支在除去原点及负实轴的平面内解析,且由反函数的导数得

$$\frac{dw}{dz}=(\ln z)'=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{e^w}=\frac{1}{z}\qquad\Rightarrow(\mathrm{Ln}\,z)'=\frac{1}{z}$$

例 2 计算下列各函数值

$(1)\ \mathrm{Ln}(-1) \quad (2)\ \mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}i)$

解 $(1)\mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + i[\arg(-1) + 2k\pi]$

$$= 0 + i(\pi + 2k\pi)$$

$(2)\ \mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}i)$

$$= \ln|-1+\sqrt{3}i| + i[\arg(-1+\sqrt{3}i) + 2k\pi]$$

$$= \ln 2 + i(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)\ \ (k \in Z)$$

11.4.3、幂函数

(1)复幂函数的定义

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]}$$

(2)幂函数的性质

①定义域

$w = z^{\alpha}$的定义域是$0 < |z| < +\infty$;

② $z^{\alpha_1+\alpha_2} = z^{\alpha_1} \cdot z^{\alpha_2}$ $(z \neq 0, \alpha_1, \alpha_2$是复常数$)$

③在除去原点和负实轴的复平面内解析,且

$$(z^{\alpha})' = \alpha z^{\alpha-1}$$

④ $w=z^{\alpha}$一般为多值函数

1)、 $\alpha=n\ (n\in N)$时, z^{n}是复平面上的单值解析函数

2)、 $\alpha=\dfrac{1}{n}\ (n\in N)$, $z^{\frac{1}{n}}$包含n个单值分支

$$z^{\frac{1}{n}}=|z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right]$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

3)、 $\alpha=\dfrac{m}{n}\ (n,m\in N)$, $z^{\frac{m}{n}}$包含n个单值分支

4)、 α是无理数或虚数, z^{α}包含无穷多个单值分支。

例3 计算下列各函数值

(1) i^i (2) $1^{\sqrt{2}}$

解 (1) $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i\cdot[\ln|i|+i\arg i+i2k\pi]}$

$$= e^{i\cdot(0+i\frac{\pi}{2}+i2k\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是一个实数.

(2) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1|+i\arg 1+2k\pi i)}$

$$= e^{\sqrt{2}(0+i(0)+2k\pi i)} = e^{2\sqrt{2}k\pi i}$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,)$

11.4.4、三角函数

(1)复三角函数的定义

由指数函数的定义

当$x=0$时，$\begin{cases} e^{iy}=\cos y+i\sin y \\ e^{-iy}=\cos y-i\sin y \end{cases}$ 从而得到欧拉公式

$$\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \quad \cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \quad \forall y\in R \quad (2)$$

推广到复变数情形

定义 $$\sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} \quad \cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} \quad (3)$$

——称为z的正弦与余弦函数

(2) 正弦与余弦函数的性质

1) $\sin z$和$\cos z$的定义域都是整个复平面,即$|z|<+\infty$

2) $\sin z$及$\cos z$是$T=2\pi$周期函数

$$(\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2}$$

$$=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z)$$

3) 在z平面上处处解析,且

$$(\sin z)'=\cos z \quad (\cos z)'=-\sin z$$

(事实上,$(\sin z)'=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})'=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z$)

例4 计算下列各函数值

(1) $\cos(-i)$ (2) $\sin(1+2i)$

解 (1) $\cos(-i) = \dfrac{e^{i(-i)}+e^{-i(-i)}}{2}$

$$= \frac{e^{1}+e^{-1}}{2} = \frac{e+e^{-1}}{2}$$

(2) $\sin(1+2i) = \dfrac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i} = \dfrac{e^{-2+i}-e^{2-i}}{2i}$

$$= \frac{e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1)}{2i}$$

$$= \frac{e^{2}+e^{-2}}{2}\sin 1 + i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\cos 1$$

例5 求出下列方程的全部解

(1) $1+e^{z}=0$ (2) $\sin z=0$

解(1) 由 $1+e^{z}=0$得$e^{z}=-1$

$$z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+[i\cdot\arg(-1)+i\cdot 2k\pi]$$

$$=0+i\cdot\pi+i\cdot 2k\pi$$

$$=(2k+1)\cdot i\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,)$$

(2) 由$\sin z=0$得 $\sin z=\dfrac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}=0$

$$\Rightarrow\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}=0\Rightarrow e^{zi}-e^{-zi}=0\Rightarrow e^{2zi}=1$$

$$2zi=Ln1\qquad z=\frac{1}{2i}Ln1=-\frac{i}{2}[2k\pi i]$$

即 $z=k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,)$

可以求得：$\cos z$的零点为$z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in 0,\pm1,\pm2,\cdots,)$

内容小结

1、复变函数的极限 ①极限的定义

②极限存在的充要条件

③极限运算法则

2、复变函数的连续性 ①连续的定义

②函数连续的充要条件

③连续函数的运算性质

3、导数 ①导数、导函数定义

②求导公式和法则

③可导与连续的关系

4、解析函数　①解析函数的定义

②解析函数的运算

③解析存在的充要条件

④判断可导与解析的方法

5、重要结论:

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面上连续可导、解析;

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面上（除分母为0点外）连续可导、解析.

6、$e^z, Lnz, z^\alpha, \sin z, \cos z$的定义、解析性

作业: 11-3,11-4