第12章 复变函数的积分

12.1、复变函数积分的概念

12.1.1、复函数积分的概念及其简单性质

1. 有向曲线

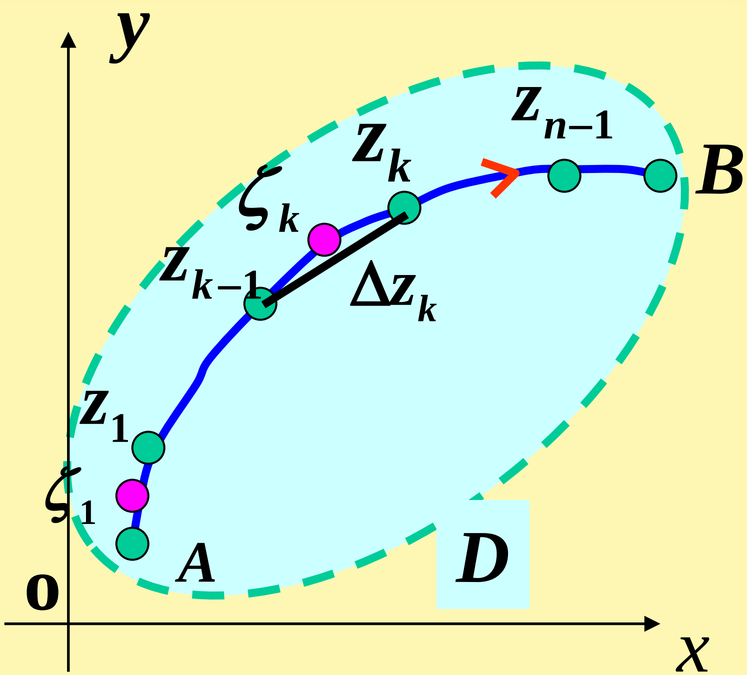
$$C \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t: \alpha \to \beta) \quad (1)$$

$z'(t)$连续且$z'(t) \neq 0$

C——z平面上的一条光滑曲线.

等价实参数方程：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t: \alpha \to \beta)$

2. 积分的定义



定义 设$w = f(z) \quad z \in D$

C为区域D内点$A \to$点B

的一条光滑有向曲线.

将$\overset{\frown}{AB}$任意分划成n个

小弧段: $A = z_0, z_1, \cdots z_n = B$

$\forall \varsigma_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 作乘积$f(\varsigma_k)\Delta z_k$, 并作和式$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k$

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, 记$\Delta S_k$为$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度, $\delta = \max_{1\le k\le n}\{\Delta S_k\}$

若 $\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k \overset{\exists}{=} I$ 则称I为$f(z)$沿曲线C从$(A \to B)$的积分,

$\boxed{\text{无论如何分割}C, \zeta_i\text{如何取}}$

记作$\int_C f(z)dz$

即 $\displaystyle\int_C f(z)dz=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k$

3. 积分性质　　　　**由积分定义得:**

$$1)\int_C f(z)dz=-\int_{C^-} f(z)dz$$

$$2)\int_C kf(z)dz=k\int_C f(z)dz$$

$$3)\int_C [f(z)\pm g(z)]dz=\int_C f(z)dz\pm\int_C g(z)dz$$

$$4)C=C_1+C_2+\cdots+C_n$$

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz$$

12.1.2. 积分存在的条件及其计算法

定理 当$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑曲线C上连续时$\Rightarrow \int_C f(z)dz \exists$

且 $\boxed{\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy}$ (4)

记忆 $\int_C (u+iv)(dx+idy)$

注: 这个定理表明$\int_C f(z)dz$可通过二个二元实变函数的曲线积分来计算

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i(\int_C vdx + udy)$$

设光滑曲线 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t)$

由曲线积分的计算法得

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha(起)}^{\beta(终)} \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt$$

$$+ i\int_{\alpha(起)}^{\beta(终)} \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\}dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}[x'(t) + iy'(t)]dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

$$\therefore \int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

一代，二定

复积分计算方法:

1、线积分法 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t:\alpha \to \beta)$

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i(\int_C vdx + udy)$$

2、参数法

$$C \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t:\alpha \to \beta) \quad (1)$$

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

一代，二定化为对参数t的定积分

一般用第二种方法

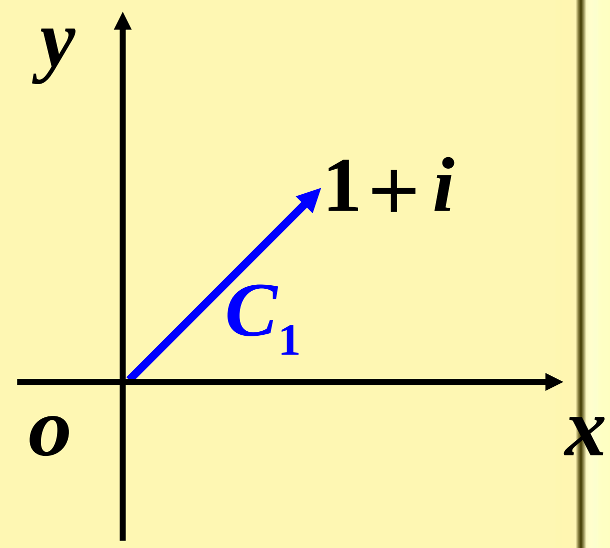
例1 计算$\int_C \bar{z}dz$,其中曲线C是

(1) 沿从原点到点$z_0=1+i$的直线C_1

(2) 沿从原点到点$z_1=1$的直线C_2和从点$z_1=1$到$z_0=1+i$的直线C_3所连接而成的折线。

解 (1)曲线C_1的方程:

$$z=(1+i)t\ (t:0\to 1)$$



$$\therefore \int_C \bar{z}dz=\int_0^1 \overline{(1+i)t}(1+i)dt$$

$$=\int_0^1 (1-i)t(1+i)dt=\int_0^1 2tdt=t^2\Big|_0^1=1$$

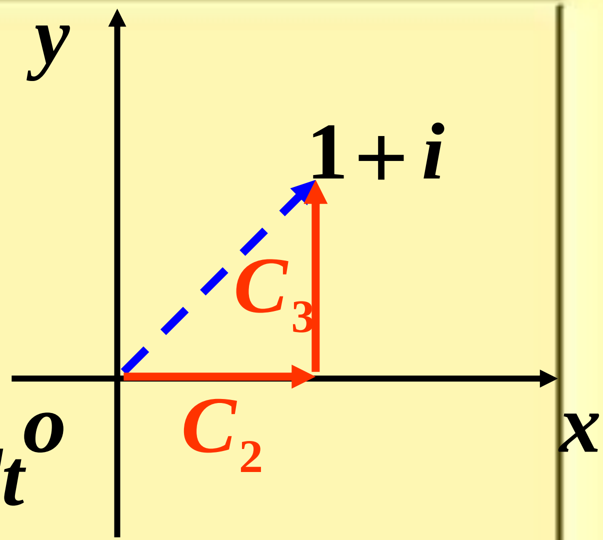
NJUPT

(2) 曲线C_2 :

$y=0 \to z=t \quad (t:0\to 1), dz=dt$

曲线C_3 :

$x=1 \to z=1+it \quad (t:0\to 1), dz=idt$



$$\therefore \int_C \bar{z}dz = \int_{C_2} \bar{z}dz + \int_{C_3} \bar{z}dz$$

$$= \int_0^1 \bar{t}dt + \int_0^1 \overline{(1+it)}\ idt = \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1-it)\ idt$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + i(1-0) + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 1+i$$

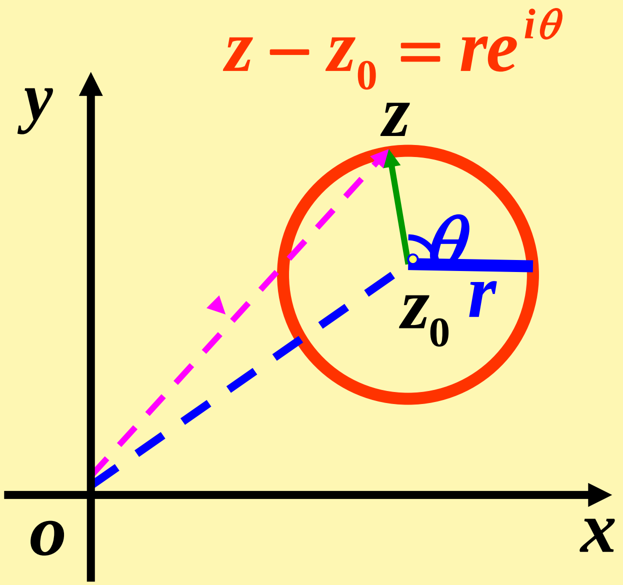
例2 计算复积分 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ $(n \in Z)$，其中

曲线C为以z_0为中心,r为半径的正向圆周。

解 曲线C: $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow z = z_0 + r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow z - z_0 = re^{i\theta} \quad (\theta: 0 \to 2\pi)$$



$$I = \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta})^{n+1}} \cdot re^{i\theta} \cdot id\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta$$

$$I=\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta$$

(1)当$n=0$时， $I=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^0 d\theta=\frac{i}{r^0}2\pi=2\pi i;$

(2)当$n\neq 0, n\in Z$时，

$$I=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)d\theta=0$$

结果：

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i & n=0\\ 0 & n\neq 0, n\in Z\end{cases}$$

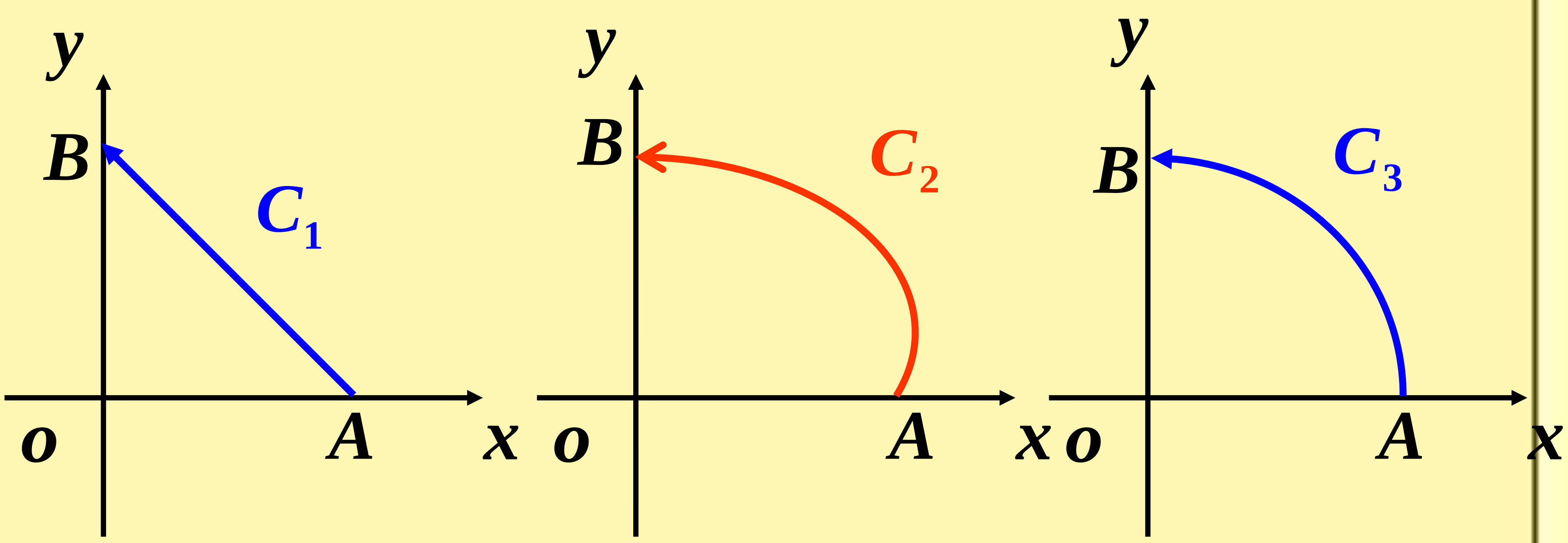
这个结果以后经常用到它的特点是与积分路线圆周的中心和半径无关应记注。

例3 计算复积分$\int_C z dz$,其中曲线C是

(1) C_1 : 从点(1,0)到点(0, 1)的直线

(2) C_2 :沿一条抛物线$y^2 = 1 - x$从点(1,0)到点(0, 1)

(3) C_3 :沿单位圆$x^2 + y^2 = 1$从点(1,0)到点(0, 1)



N J U P T

解 ① $C_1: x+y=1$

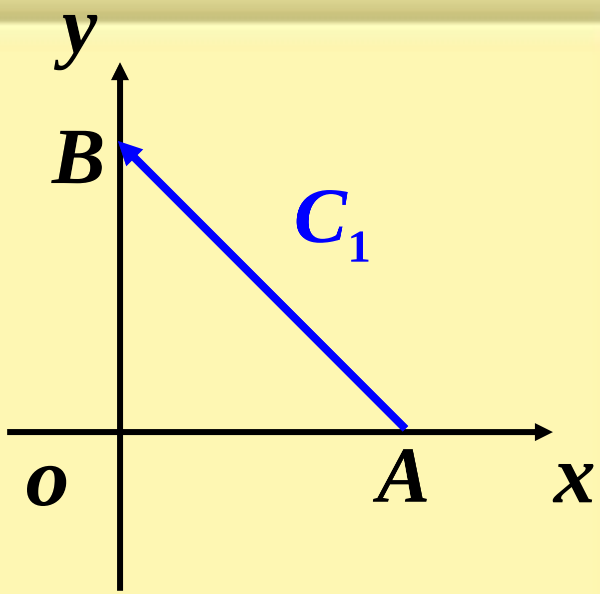
$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$$

$\Rightarrow z=t+(1-t)i$ (t从 1 到 0),

$dz=(1-i)dt$

$$\int_{C_1} z\,dz=\int_1^0 [t+(1-t)i](1-i)dt$$

$$=(1-i)\int_1^0 [t+(1-t)i]dt \quad =-1$$

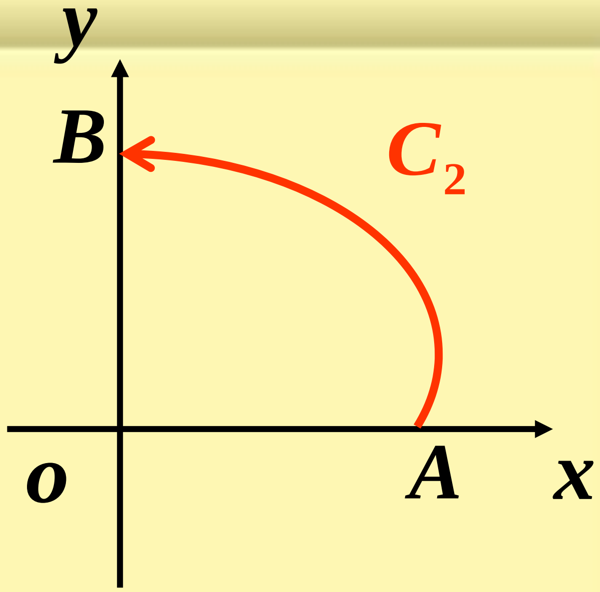


(2) $C_2: y^2 = 1 - x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = (1 - t^2) + it \ (t\text{从 } 0 \text{ 到} 1\ ),$$

$$dz = (-2t + i)dt$$

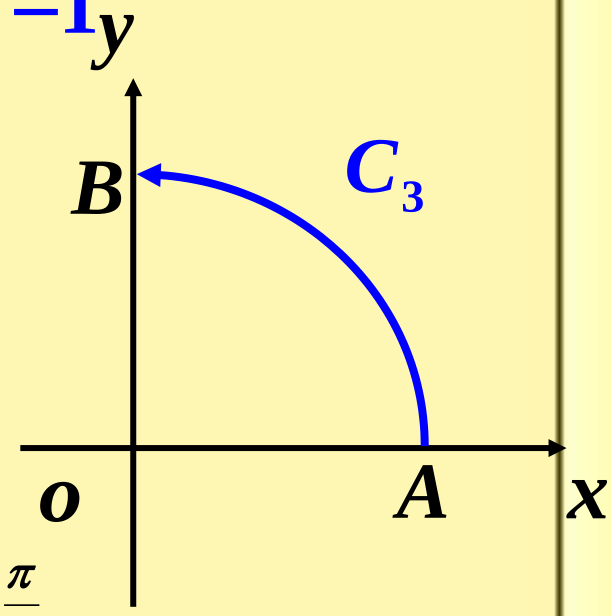


$$\int_{C_2} z dz = \int_0^1 [(1 - t^2) + it\,](-2t + i)dt = -1$$

(3) $C_3: x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow z = e^{it} \ (t\text{从 } 0 \text{ 到 } \frac{\pi}{2}\ ),$$

$$dz = ie^{it}dt$$



$$\int_{C_3} z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it} \cdot ie^{it} dt = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2it}\, dt = i \cdot \frac{e^{2it}}{2i}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$$

12.2、积分基本定理

从上一讲的例子可知复积分 $\int_C \bar{z}dz$，沿不同路径而起点终点相同的曲线 C 的积分值是不同的;

$\int_C zdz$ 沿不同路径，起点终点相同的曲线 C 的积分值是相同的。

问题：复积分的积分值与路径无关，或沿封闭曲线的积分值为零的条件是什么?

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\left(\int_C vdx + udy\right)$$

12.2.1　单连通域内的柯西定理

定理12.2.1　(柯西定理)

如果函数$f(z)$在单连通域B内处处解析，那么函数$f(z)$沿B内任一条封闭曲线C的积分为零:

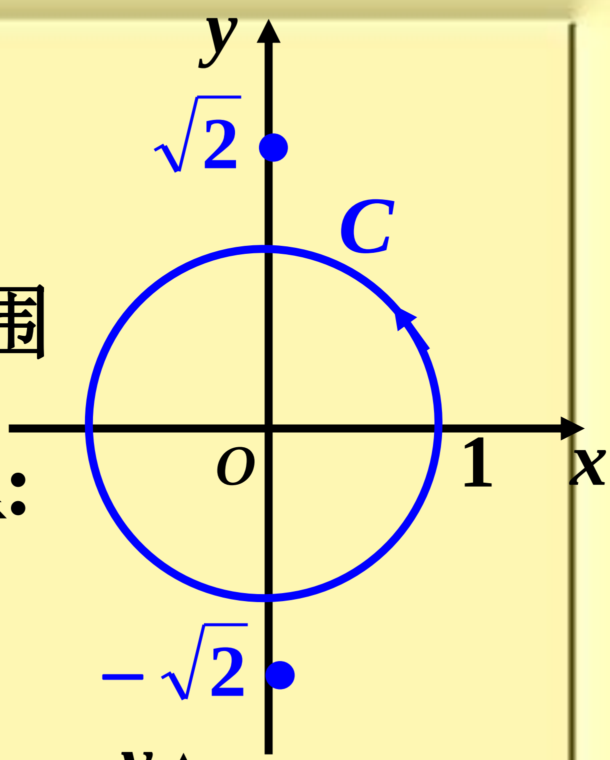
$$\oint_C f(z)dz = 0$$

例1 计算下列复积分

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2}dz$　　　(2) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \sin z dz$

(其中C是包含原点的任一条闭曲线，取正向)

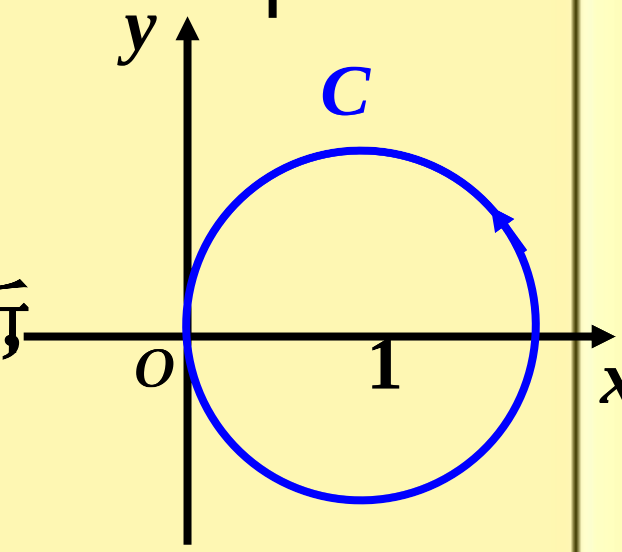
解 (1) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2} dz$



$\because\ f(z) = \frac{1}{z^2+2}$ 在曲线 $C: |z| = 1$ 所围的区域 D 内处处解析, 由柯西定理:

$\therefore \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2} dz = 0$

解 (2) $\oint\limits_{|z-1|=1} \sin z dz$



$\because\ f(z) = \sin z$ 在复平面上处处解析,

由柯西定理: $\therefore \oint\limits_{|z-1|=1} \sin z dz = 0$

推论:

1、如果函数$f(z)$在单连通域B内处处解析，那末积分

$\int_C f(z)dz$与连结起点及终点的路线C无关。

仅与起点终点有关

2、如果函数$f(z)$在单连通域B内处处解析,那么

函数$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$必为$B$内的一个解析函数,

且$F'(z)=f(z)$。

称$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$是$f(z)$的一个原函数.

3、如果函数$f(z)$在单连通域B内处处解析，$G(z)$为$f(z)$的一个原函数，那么

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0)$$

这里z_0, z_1为域B内的两点。

例2 计算下列积分：

$\int_C \frac{1}{z^2}dz$其中C为半圆周$|z| = 3, \operatorname{Re} z \geq 0$,

起点为$-3i$，终点为$3i$；

解 $\because \frac{1}{z^2}$在$\operatorname{Re} z \geq 0$，$z \neq 0$上解析，

故 $\int_C \frac{1}{z^2}dz = \frac{1}{-2+1} z^{-2+1}\Big|_{-3i}^{3i} = \frac{2i}{3}$

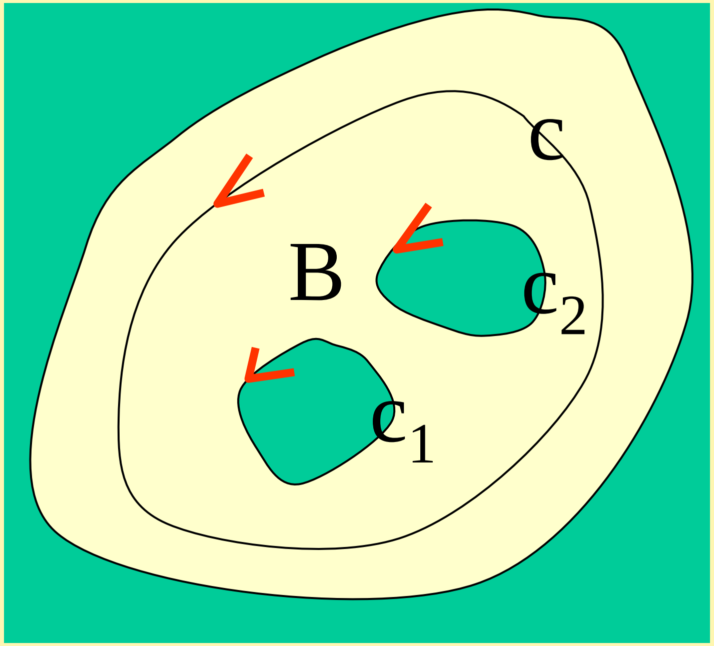
NJUPT

12.2.2、多连通域内的柯西定理—复合闭路定理

定理12.2.2 (复合闭路定理)

设①B是由$\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$所围成的有界多连通区域，且$B \subset D$(多连通),②$f(z)$在$D$内解析,则$\oint_\Gamma f(z)dz = 0 \quad (1)$

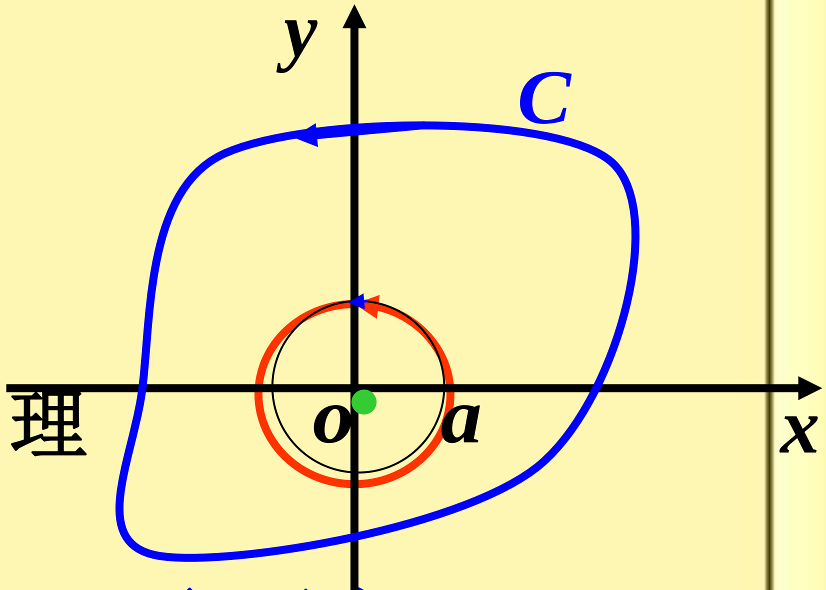
或$\oint_c f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{c_i} f(z)dz \quad (2)$



其中:闭$C \subset D, C_1, C_2, \cdots C_n$是在$C$的内部的简单闭曲线(互不包含也不相交),每一条曲线C及C_i是逆时针,C_i^- –顺时针.

例2 计算下列复积分

(1) $\oint_C \frac{1}{z}dz$ (其中C是包含原点的任一条闭曲线,取正向)



解 由于$f(z)=\frac{1}{z}$在曲线C所围的区域D内有一个奇点$z=0$,不能直接用柯西定理

以原点为中心作一个圆$C_1:|z|=a$,取正向

根据复合闭路定理

$$\therefore \oint_C \frac{1}{z}dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz = \oint_{|z|=a} \frac{1}{z}dz = 2\pi i$$

12.3、积分基本公式

12.3.1 柯西积分公式

定理12.3.1 (柯西积分公式)

如果函数$f(z)$在区域D内处处解析，C为D内的任何一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于D，z_0为C内的任一点，那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

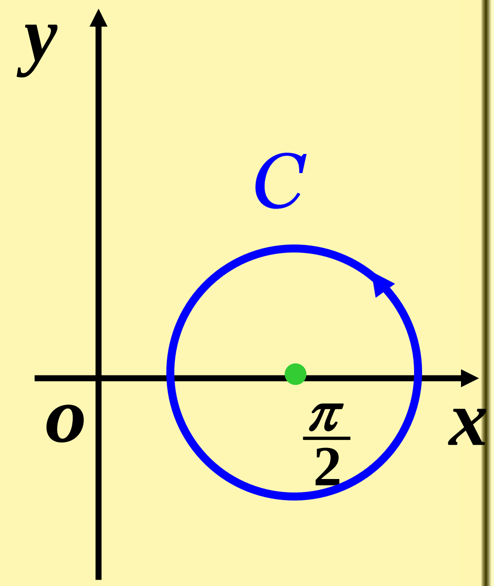
注：公式常变成：

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\cdot f(z_0)$$

例1计算下列复积分（沿曲线正向）

(1) $\displaystyle\oint_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1} \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}dz$

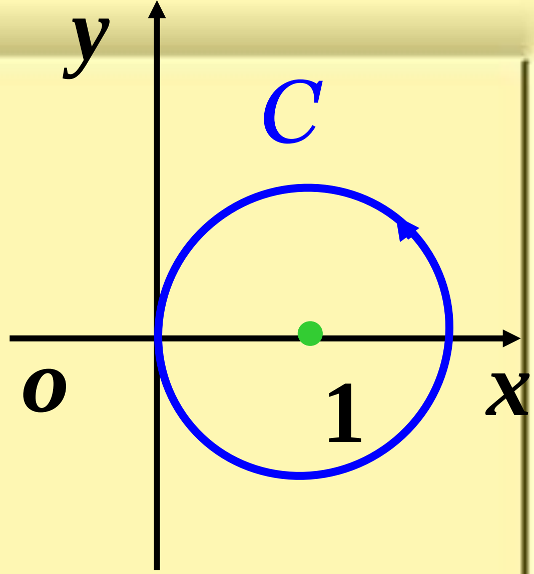
解：(1) $\because \sin z$在全平面上处处解析，从而在由曲线$C:\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1$所围区域内也处处解析。



由柯西积分公式得

$$\oint_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1} \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}dz = 2\pi i \cdot \sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i$$

(2) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z^2-1}dz$



解 $\because \dfrac{\cos z}{z^2-1} = \dfrac{1}{z-1} \cdot \dfrac{\cos z}{z+1}$

$\dfrac{\cos z}{z+1}$在曲线$C: |z-1|=1$所围的区域内处处解析,

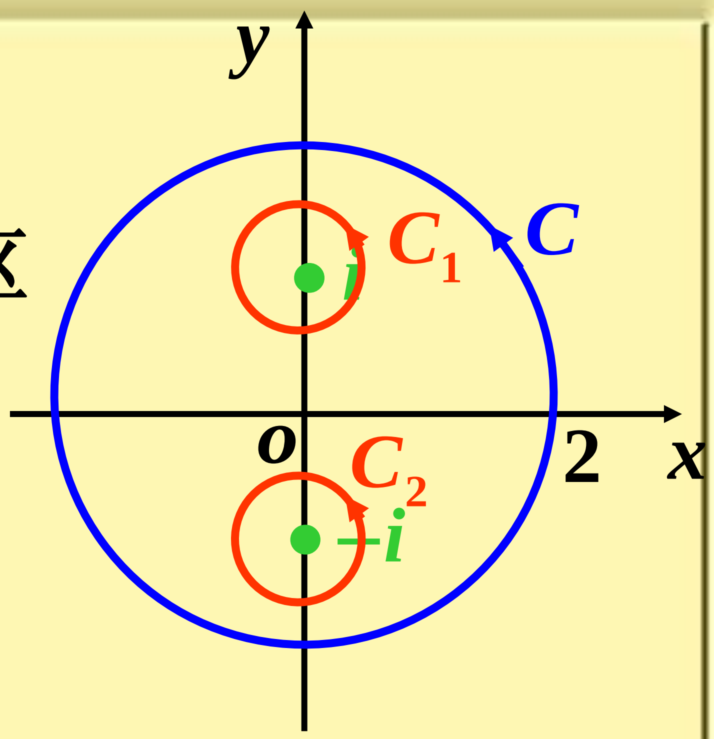
$\dfrac{1}{z-1}$在区域内有一个奇点$z=1$,

由柯西积分公式得:

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z^2-1}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\cos z}{z+1}\right|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{\cos 1}{2}$$

$$= \pi i \cos 1$$

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1} dz$



解 $\frac{e^z}{z^2+1}$ 在曲线 $C: |z|=2$ 所围区域内有两个奇点 $z=i$ 和 $z=-i$。

作两条封闭曲线 C_1 和 C_2，

根据复合闭路定理:

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z^2+1} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z^2+1} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i} dz + \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z-i}}{z+i} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^z}{z+i}\Big|_{z=i} + 2\pi i \cdot \frac{e^z}{z-i}\Big|_{z=-i} = (2\pi \sin 1) i$$

12.3.2、解析函数的高阶导数

定理12.3.2 (解析函数的高阶导数公式)

解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数,它的n阶导数为:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=1,2,\cdots)$$

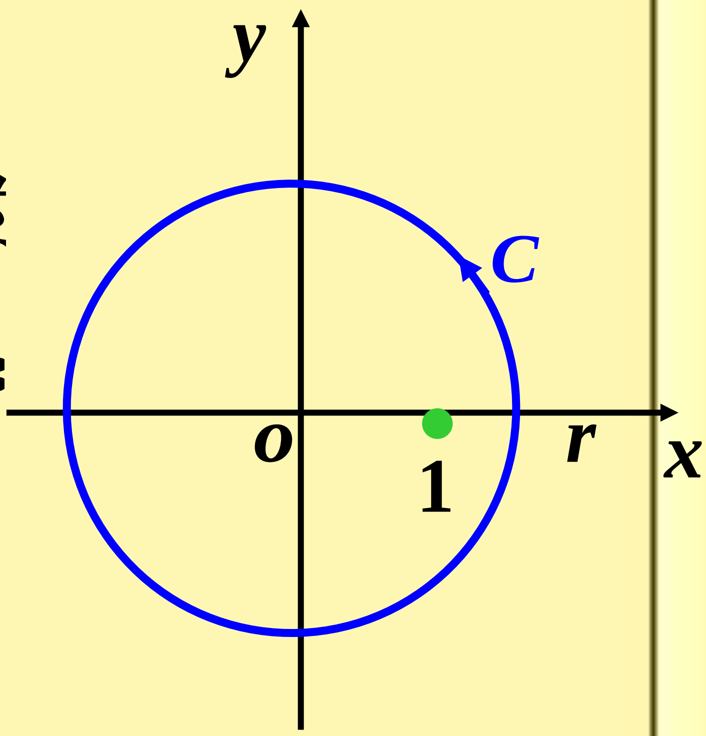
其中C为在函数$f(z)$的解析区域D内围绕z_0的任何一条正向简单闭曲线,而且它的内部完全含于D。

注意:利用所给公式可以计算

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

其中$f^{(n)}(z_0)$是函数$f(z)$在z_0处的n阶导数值

例 2 求积分$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^3} dz$的值, 其中$C$为正向圆周$|z| = r > 1$



解: $\because \cos \pi z$在C内是处处解析的

根据解析函数的高阶导数公式:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} [\cos \pi z]'' \Big|_{z=1}$$

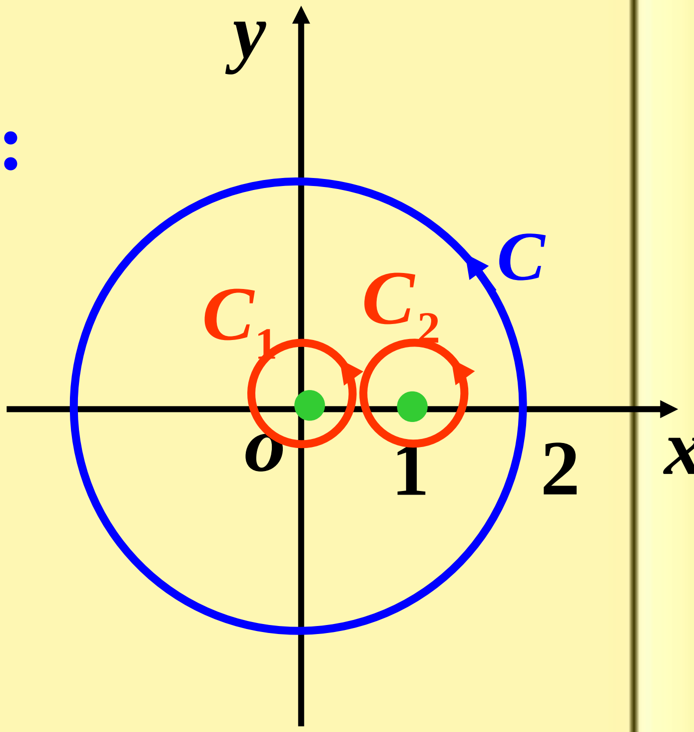
$$= \pi i [-\pi^2 \cos \pi z] \Big|_{z=1} = \pi^3 i$$

例3 求积分$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$的值，其中$C: |z| = 2$(正向)

解：$\because$ 函数e^z在全平面上解析，

函数$\frac{1}{z(1-z)^3}$在C内有两个奇点：

$z = 0, z = 1$。



作封闭正向曲线C_1，仅含$z = 0$;

作封闭正向曲线C_2，仅含$z = 1$.

$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$$

复合闭路定理 $\oint_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$

$$=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}dz-\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}dz$$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^z}{(1-z)^3}\bigg|_{z=0}-2\pi i\cdot\frac{1}{(3-1)!}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\bigg|_{z=1}$$

$$=2\pi i-e\pi i \quad =(2-e)\pi i$$

注: $\left(\frac{e^z}{z}\right)'=\frac{ze^z-e^z}{z^2}$ $\qquad \left(\frac{e^z}{z}\right)''=\frac{z^2e^z-2ze^z+2e^z}{z^3}$

内容小结

(1).开路积分:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

$C \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t : \alpha \to \beta)$

$$(ii)\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0),\ f(z)\text{解析},$$

$G(z)$为$f(z)$的一个原函数

(2).闭路积分: $\oint_C f(z)dz$

$(i)\oint f(z)dz = 0, f(z)$在$C$包围的区域内解析

$$(ii)\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}g^{(n)}(z_0), n = 0,1,2\cdots$$

$f(z)$在C包围的区域内有一个奇点，$g(z)$解析。

(iii)利用复合闭路定理

$$\oint_c f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\oint_{c_i} f(z)dz$$

$f(z)$在C包围的区域内有n个奇点，C_i分别为包围这n个奇点的小区域的边界，取逆时针方向。

课后作业：　12.1,　12.2