第13章 复级数与留数定理

第13章　复级数与留数定理

13.1、复级数

13.1.1、复数项级数

1、复数列极限的定义

定义1　设$\{\alpha_n\}(n=1,2,\cdots,\cdots)$为一复数列,其中$\alpha_n = a_n + ib_n$,又设$\alpha = a + ib$为一确定的复数,

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$,存在一个正数$N(\varepsilon)$,当$n > N$时,$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$成立,那么$\alpha$称为复数列$\{\alpha_n\}$当$n \to \infty$的极限,记作:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

此时也称复数列$\{\alpha_n\}$收敛于α。

几个结论:

(1) 复数列$\{\alpha_n = a_n + ib_n\}$收敛于$\alpha = a + ib$的充分必要条件是数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别收敛于$a$和$b$。

(2) 复数列的极限也有与实数列极限类似的运算法则。设$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha, \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \beta$,则

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n \pm \lim_{n\to\infty}\beta_n = \alpha \pm \beta$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n \cdot \lim_{n\to\infty}\beta_n = \alpha \cdot \beta$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

(3) 复等比数列的极限结果:

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0 & |z|<1 \\ \infty & |z|>1 \\ 1 & z=1 \\ \text{不存在} & |z|=1\text{但}z\neq 1 \end{cases}$$

解：设$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(1) $r<1, \lim\limits_{n\to\infty} z^n=\lim\limits_{n\to\infty}(r^n\cos n\theta+i\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\theta)=0$

(2) $r>1, \because \lim\limits_{n\to\infty}|z^n|=\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n=\infty$

(3) $z=1, \lim\limits_{n\to\infty} z^n=1$

(4) $|z|=1, z\neq 1$, 即$\theta\neq 2k\pi$

$\lim\limits_{n\to\infty} z^n=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n\theta+i\sin n\theta)$不存在

2、复数项级数的定义

定义2 设复数列：$\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}(n=1,2,\cdots,n),$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$ ---无穷级数

级数的前面n项的和

$$s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$ ---级数的部分和

若部分和数列$\{s_n\}$ $\begin{cases} \text{收敛}—\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\text{称为收敛} \\ \qquad \lim_{n\to\infty}s_n=s\text{称为级数的和} \\ \text{不收敛}—\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\text{称为发散} \end{cases}$

几个结论：

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的充要条件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛。

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$。

例1 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$的敛散性

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2})$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2})$发散。

3、复数项级数的绝对收敛与条件收敛

定义3 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散,$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$条件收敛。

几个结论 (1)$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛,$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$也收敛,

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛,$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$都收敛,

例2 判断下列级数的绝对收敛性与收敛性

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$$

解：$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 绝对收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 条件收敛。

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$$

解：$\because \left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!}$，

根据实正项级数的比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛。

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right|$ 收敛。 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 绝对收敛。

13.1.2、复变函数项级数

1、复变函数项级数的定义

定义4 设复变函数列：$\{f_n(z)\}\quad z\in D,\quad n=1,2,\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \qquad (1)$$

---称为复变函数项级数

级数的最前面n项的和

$$s_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

---级数的部分和

- 若$\forall z_0\in D\quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)\overset{\exists}{=}s(z_0)$,称级数(1)在$z_0$收敛,其和为$s(z_0)$，若$\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)$不$\exists$，称级数(1)在$z_0$发散.

若级数(1)在D内处处收敛，其和为z的函数

$s(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$ ---级数(1)的和函数

2、幂级数的定义

定义5 形如$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$的级数称为关于$(z-z_0)$的幂级数,简称幂级数。

当$z_0=0$时,幂级数就成$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$。

显然,形如$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$的幂级数可借助于变换$z-z_0=t$,可化为$\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$。

因此下面$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$进行讨论。

3、幂级数的敛散性

(1) 阿贝尔定理

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$在$z = z_0 (\neq 0)$收敛,那么对满足$|z| < |z_0|$的$z$,级数必绝对收敛;

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$在$z = z_0 (\neq 0)$发散,那么对满足$|z| > |z_0|$的$z$,级数必发散。

由阿贝尔定理可知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$的收敛范围为一圆域。

(2) 收敛圆与收敛半径

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$的收敛范围为一圆域$|z| < R$。

当$|z| < R$,级数绝对收敛;$|z| > R$级数发散。

当$|z| = R$,级数可能收敛,也可能发散。

称R为幂级数的收敛半径;$|z| < R$为收敛圆域;

$|z| = R$ 为收敛圆。

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$的收敛圆的中心为$z = z_0$;

(3) 收敛半径的求法

①比值法

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lambda \neq 0$,那么收敛半径$R = \dfrac{1}{\lambda}$。

②根值法

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \mu \neq 0$,那么收敛半径$R = \dfrac{1}{\mu}$。

如果$\lambda = 0$或$\mu = 0$,那么$R = \infty$;

如果$\lambda = \infty$或$\mu = \infty$,那么$R = 0$。

(4) 幂级数的运算和性质

①代数运算

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$分别有收敛半径$R_1$和$R_2$，并设$R = \min(R_1, R_2)$，那么当$|z| < R$时，幂级数可以逐项加减相乘。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n$$

②分析运算

1)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的和函数$f(z)$在收敛圆$|z| < R$内解析.

2)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的和函数$f(z)$在收敛圆$|z| < R$内可以逐项求导，即 $f'(z) = [\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n]' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

$$= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots \quad (|z| < R);$$

3)幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$的和函数$f(z)$在收敛圆$|z| < R$内可以逐项积分，即 $\int_0^z f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z a_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$

$$= \frac{1}{2} a_1 z + \frac{1}{3} a_2 z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots \qquad (|z| < R)$$

例 4 求下列各级数的收敛半径并写出收敛圆域

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^p}$ (p是正整数)

解 1、 $\because \lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i)^{n+1}}{(1+i)^n}\right| = |1+i| = \sqrt{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$的收敛半径$R=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

收敛圆域为$|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$。

2 $\because \lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$ $\therefore R=1,$

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^p}$ (p是正整数)的收敛圆域

为$|z+i|<1$。

13.2、泰勒级数

13.2.1、泰勒展开定理

定理1 设$f(z)$在区域D内解析，z_0为D内的一点，d为z_0到D的边界上各点的最短距离，那么当$|z-z_0|<d$时，
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$
成立，其中$C_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\ (n=0,1,2,\cdots,)$。

C_n称为泰勒系数，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$称为泰勒级数

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$称为函数$f(z)$的泰勒展开式

定理2 任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数，因而是唯一的。

2、几个常用的泰勒展开式(在$z_0=0$处的泰勒级数)

$$(1)\ \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n+\cdots \quad (|z|<1)$$

$$(2)\ \frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \quad (|z|<1)$$

$$(3)\ e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \quad (|z|<\infty)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ |z|<+\infty.$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ |z|<+\infty.$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1},\ |z|<1$$

3、求解析函数的泰勒展开式的方法

间接法

利用上述常用函数的泰勒展开式,结合级数的代数运算,分析运算,变量代换等,将解析函数在解析点展开成幂级数。

例1 将下列各函数在指定点展开成幂级数,并指出它们的收敛半径。

(1) $\dfrac{1}{1+z^3}$ $\qquad z=0$

解:(1) $\dfrac{1}{1+z^3} \underline{\underline{\text{令}z^3=t}} \dfrac{1}{1+t}$

$$=1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^n t^n+\cdots$$

$$\underline{\underline{t=z^3}}\ 1-z^3+z^6-z^9+\cdots+(-1)^n z^{3n}+\cdots$$

$(|z|<1)$

(2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ $z_0=2$

解 $\because \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{2}{(z+2)}-\dfrac{1}{(z+1)}$ 由$\begin{cases}\left|\dfrac{z-2}{4}\right|<1\\ \left|\dfrac{z-2}{3}\right|<1\end{cases}$，

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{z-2}{4})}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+\frac{z-2}{3})}$$

$\Rightarrow$ 收敛区域为$|z-2|<3$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{z-2}{4})}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+\frac{z-2}{3})}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot[1-(\frac{z-2}{4})+(\frac{z-2}{4})^2-(\frac{z-2}{4})^3+\cdots$$

$$+(-1)^n(\frac{z-2}{4})^n+\cdots]-\frac{1}{3}[1-(\frac{z-2}{3})+(\frac{z-2}{3})^2$$

$$-(\frac{z-2}{3})^3+\cdots+(-1)^n(\frac{z-2}{3})^n+\cdots]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(z-2)^n$$

收敛区域为$|z-2|<3$

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}, \quad z_0=-1$

解 $\dfrac{1}{z^2}=-(\dfrac{1}{z})'$

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-(z+1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n \qquad |z+1|<1$$

$$\frac{1}{z^2}=-(\frac{1}{z})'=(\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1} \quad |z+1|<1$$

总结

1、掌握复常数项级数的收敛性的判别法，会求幂级数的收敛半径

2、会将在$|z-z_0|<R$内的解析函数展开成泰勒级数。

作业　**13.1，13.2**