13.3 洛朗级数

13.3.1、洛朗级数的定义

1、问题的引入

由上一节知$f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，则在该圆域内，$f(z)$可展开成 $z-z_0$的幂级数。若 $f(z)$ 在z_0点不解析，但在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，那么，$f(z)$能否用级数表示呢?

例如，$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在$z=0, z=1$都不解析,但在

圆环域: $0<|z|<1$及$0<|z-1|<1$内处处解析.

当$0<|z|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\overset{\because |z|<1}{=}\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

当$0<|z-1|<1$时，

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}\left[\frac{1}{1-(1-z)}\right]$$

$\because |z-1|<1$

$$=\frac{1}{1-z}[1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots+(1-z)^n+\cdots]$$

$$=\frac{1}{1-z}+1+(1-z)+\cdots+(1-z)^{n-1}+\cdots$$

由此推想，若$f(z)$在$R_1<|z-z_0|<R_2$内解析，$f(z)$可以展开成级数，只是这个级数含有负幂次项,即

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0$$

$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

本节将讨论在以z_0为中心的圆环域内解析的函数的级数表示法。

2、洛朗级数的定义 ---含有正负幂项的级数

定义 形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \quad (1)$$

其中z_0及$c_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$都是常数 ---**洛朗级数**

正幂项(包括常数项)部分：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \quad (2)$$

负幂项部分：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots \quad (3)$$

几个结论:

1、洛朗级数由两部分组成:

(1) 正幂部分$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ (2)称为洛朗级数的解析部分,它在$|z-z_0|<R_2$内收敛

(2)负幂部分$\sum_{n=-1}^{-\infty} C_n (z-z_0)^n$ (3)称为洛朗级数的主要部分,它在无界区域$|z-z_0|>R_1$内收敛。

这是因为:若令$\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n=c_{-1}\zeta+c_{-2}\zeta^2+\cdots+c_{-n}\zeta^n+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n = c_{-1}\zeta + c_{-2}\zeta^2 + \cdots + c_{-n}\zeta^n + \cdots$$

对变数ζ级数为幂级数,设其收敛半径为R,

则当$|\zeta| < R$级数收敛,$|\zeta| > R$级数发散。

将$\zeta = \dfrac{1}{z-z_0}$代回得,$\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right| < R \overset{令}{=} \dfrac{1}{R_1}$,则级数

当$|z-z_0| > R_1$收敛,;当$|z-z_0| < R_1$发散.

2、当且仅当$R_1 < R_2$时，级数(2)及(3)有公共收敛区域即

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$在圆环域：$R_1 < |z-z_0| < R_2$内收敛.

3、洛朗级数在收敛圆环域：$R_1 < |z-z_0| < R_2$

内其和函数是解析的,而且可以逐项求导和

逐项积分。

3、洛朗展开定理

定理　设$f(z)$在$D: R_1 < |z - z_0| < R_2$内解析, 则

$$f(z) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n} \qquad (5)$$

称为$f(z)$在$D: R_1 < |z - z_0| < R_2$内的$Laurent$级数

称为$f(z)$在$D: R_1 < |z - z_0| < R_2$内的$Laurent$展开式

其中: $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_k \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad (5')$

c是D内绕z_0的任何一条简单闭曲线

注：求在圆环域内解析函数的洛朗级数展开式一般用间接法。

例1 函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在圆环域:

$$(1)\ 0<|z|<1 \quad (2)\ 1<|z|<2 \quad (3)\ 2<|z|<\infty$$

内是处处解析的,试把$f(z)$在这些区域内展开成洛朗级数。

解: $\because\ f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$

(1) 在$0<|z|<1$内,

$$\therefore\ f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n\ (0<|z|<1)$$

注:因为$f(z)$在$z=0$处解析,此时的洛朗级数即为泰勒级数.

(2)在 $1<|z|<2$内,

$$\therefore f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{z}[1+\frac{1}{z}+(\frac{1}{z})^2+\cdots+(\frac{1}{z})^n+\cdots]$$

$$-\frac{1}{2}\cdot[1+\frac{z}{2}+(\frac{z}{2})^2+\cdots+(\frac{z}{2})^n+\cdots]$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{2^{n+1}})\qquad(1<|z|<2)$$

(3)在 $2<|z|<\infty$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}-\frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}$$

$$=(-\frac{1}{z})[1+\frac{1}{z}+(\frac{1}{z})^2+(\frac{1}{z})^3+\cdots]$$

$$+(\frac{1}{z})[1+\frac{2}{z}+(\frac{2}{z})^2+(\frac{2}{z})^3+\cdots]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}\quad(2<|z|<\infty)。$$

(4) $1 < |z-2| < \infty$

$$\because f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-2)}\cdot\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}$$

$$=\frac{1}{(z-2)^2}[1-(\frac{1}{z-2})+(\frac{1}{z-2})^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}+\cdots]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+2}}$$

2、$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$在圆环域：

(1) $0<|z-i|<2$, (2) $2<|z-i|<\infty$。

解：(1) $0<|z-i|<2$

$$\because f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{(z-i)}\cdot\frac{1}{2i+(z-i)}$$

$$=\frac{1}{(z-i)}\cdot\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\dfrac{(z-i)}{2i}}$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}\right)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{z-i}{2i}\right)^{n-1}$$

(2) $2<|z-i|<\infty$

$$\because\ f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{(z-i)}\cdot\frac{1}{2i+(z-i)}$$

$$=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-i}}$$

$$\therefore\ f(z)=\left(\frac{1}{z-i}\right)^2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{z-i}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-i)^{n+2}}$$

例3 将 $\dfrac{e^z}{z^3}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成Laurent级数.

解 $$\frac{e^z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{z^3}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

例4 将 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展成Laurent级数.

解 $\because$ 在复平面上，$e^t=1+t+\dfrac{1}{2!}t^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}t^n+\cdots$

令 $t=\dfrac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots+\dfrac{1}{n!z^n}+\cdots$

$(0<|z|<+\infty)$

总结

1、会将在 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数展开成洛朗级数。

课后作业：

13.3