13.4 留数与留数定理

13.4.1、孤立奇点

1、孤立奇点的定义

定义　若$f(z)$在z_0处不解析，但在z_0的某个去心邻域

$0<|z-z_0|<\delta$内解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点.

例如　$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$　----$z=0$为孤立奇点

$$f(z)=\frac{1}{z-1}$$ ----$z=1$为孤立奇点

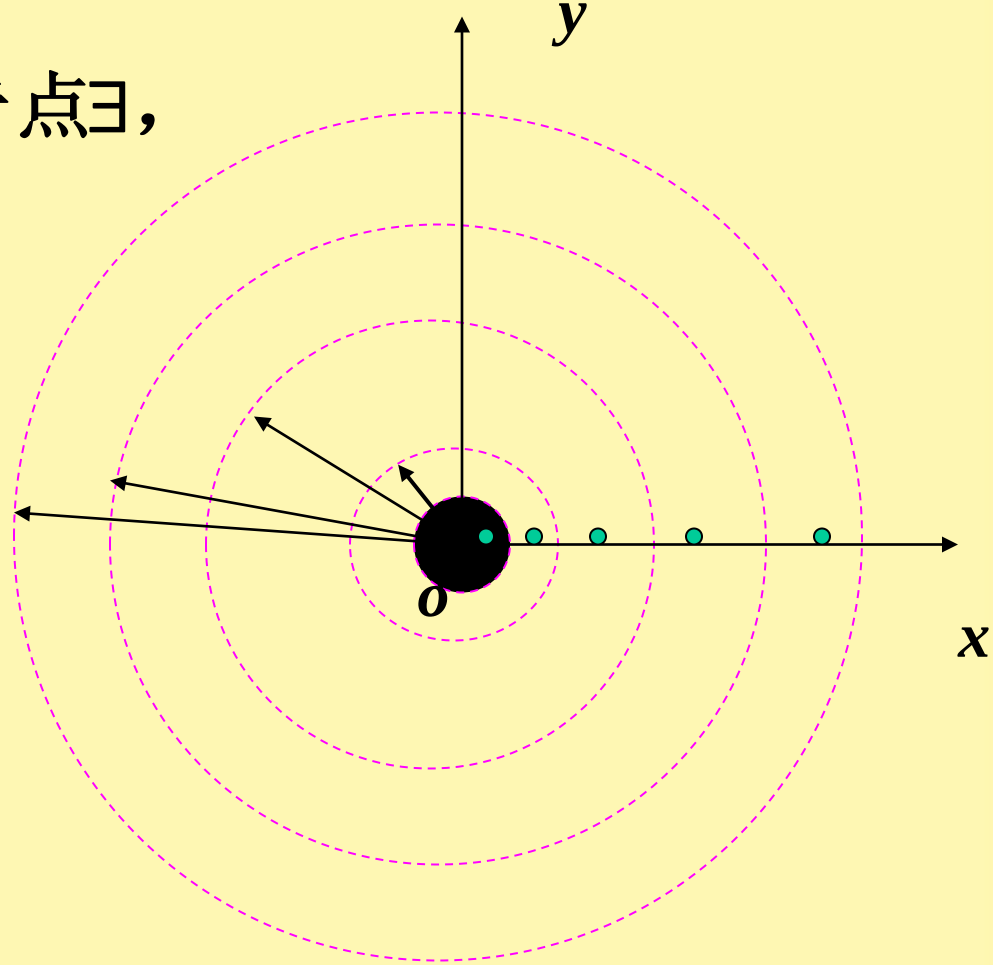
$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

----$z=0$及$z=1/n\pi\,(n=\pm1,\pm2,\cdots)$都是它的奇点

但 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\pi}=0$, $\therefore$ 在 $z=0$ 不论多么小的去心邻域内,总有 $f(z)$ 的奇点 $\exists$,

故 $z=0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点。

这说明奇点未必是孤立的。



NJUPT

2、孤立奇点的分类

以下将$f(z)$在孤立奇点的邻域内展成洛朗级数，根据展开式的不同情况，将孤立点进行分类。考察：

$$(1)\ \frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

特点：没有负幂次项

$$(2)\ \frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots$$

特点：只有有限负幂次项

$$(3)\ e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

特点：有无穷多负幂次项

定义 设z_0是$f(z)$的一个孤立奇点，若

$$(i)\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

没有负幂次项，称$z=z_0$为可去奇点;

$$(ii)\ f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n(c_{-m}\neq 0, m\geq 1)$$

只有有限负幂次项，称$z=z_0$为m 级极点;

$$(iii)\ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

有无穷多负幂次项，称$z=z_0$为本性奇点。

3、孤立奇点的分类的判定

- 若z_0为$f(z)$的可去奇点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}f(z)=c_0$$

补充定义：$f(z_0)=c_0$　　$f(z)$在z_0解析.

- 若z_0为$f(z)$的$m\ (m\geq 1)$ 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n(c_{-m}\neq 0, m\geq 1)$$

$$\Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$$

其中：$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots,$

$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$内是解析函数且$g(z_0)\neq 0$.

- 若z_0为$f(z)$的本性奇点

$\Leftrightarrow f(z)$的洛朗级数有无穷多项负幂次项

4. 零点与极点的关系

(1)定义 不恒等于0的解析函数$f(z)$如果能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

其中：$\varphi(z_0)\neq 0, \varphi(z)$在$z_0$点解析$, m\in N$

则称$z=z_0$为$f(z)$的m级零点。

例如：$z=0$与$z=1$分别是$f(z)=z(z-1)^3$的一级与三级零点。

(2)判别方法 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

$$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0(n=0,1,2,\cdots,m-1) \quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

$$(\varphi(z_0)\neq 0, \varphi(z)\text{在}z_0\text{点解析}, m\in N)$$

例如 $z=0$与$z=1$均为$f(z)=z(z-1)^3$的零点。

又$f'(z)=(z-1)^3+3z(z-1)^2$

$f''(z)=6(z-1)^2+6z(z-1)$

$f'''(z)=12(z-1)+6(z-1)+6z$

$\because\ f'(0)=(-1)^3\neq 0$

$\therefore z=0$为一级零点

$\because\ f'(1)=0 \quad f''(1)=0 \quad f'''(1)=6\neq 0$

$\therefore z=1$为三级零点

(3)零点与极点的关系

定理 若z_0是$f(z)$的m级零点

$$\Leftrightarrow z_0\text{是}\frac{1}{f(z)}\text{的}m\text{级极点.}$$

推广 若z_0是$f(z)$的m级零点, $g(z)$的n级零点

则(1)当$m > n$时，z_0是$\dfrac{g(z)}{f(z)}$的$m-n$级极点.

(2)$m \le n$, z_0是$\dfrac{g(z)}{f(z)}$的可去奇点.

例 1 指出下列孤立奇点的类型。

(1) $\dfrac{z^4-1}{z^2+1}$ $z=\pm i$ 是孤立奇点

$\because \lim\limits_{z\to\pm i}\dfrac{z^4-1}{z^2+1}=\lim\limits_{z\to\pm i}(z^2-1)=-2$

$\therefore z=\pm i$是可去奇点;

(2) $\dfrac{\sin z}{z^2}$ $z=0$是孤立奇点,

$\because \dfrac{\sin z}{z^2}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{3!}+\dfrac{z^3}{5!}-\dfrac{z^5}{7!}+\cdots$

$\therefore z=0$是一级极点;

另解:$z=0$是$\sin z$的一级零点,是z^2的二级零点

$\Rightarrow z=0$是$\dfrac{\sin z}{z^2}$的一级极点

(3) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^5}$ $z=0$是孤立奇点

$\because (1-e^{2z})\big|_{z=0}=0, (1-e^{2z})'\big|_{z=0}=-2\neq 0$

$\therefore z=0$是$1-e^{2z}$的一级零点

而$z=0$是z^5的五级零点,

$\therefore z=0$是$\dfrac{1-e^{2z}}{z^5}$的四级极点;

13.4.2、留数与留数定理的应用

1、留数的定义

定义　设z_0为$f(z)$的孤立奇点，$f(z)$在z_0邻域内的洛朗级数中负幂次项$(z-z_0)^{-1}$的系数c_{-1}称为$f(z)$在z_0的留数，记作$\mathrm{Res}[f(z), z_0]$ 或 $\mathrm{Res}\, f(z_0)$。

即：　$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$　　(1)

(z_0是$f(z)$的孤立奇点　c包含z_0在其内部)

对上式两边沿简单闭曲线c逐项积分得：

$$\oint_c f(z)dz = c_{-1}\oint_c \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i c_{-1}$$

故　$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz \qquad (2)$$

2、留数的计算规则

一般方法：求Res[$f(z)$, z_0]是采用将$f(z)$ 在 z_0邻域内展开成洛朗级数求系数c_{-1}。

特别方法：先判别奇点的类型，利用下面留数规则。

以下就三类奇点进行讨论：

(i)若$z=z_0$为可去奇点$\Rightarrow c_{-1}=0 \Rightarrow \mathrm{Res}[f(z),z_0]=0$

(ii)若$z=z_0$为本性奇点$\Rightarrow f(z) \overset{展开}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$

$\Rightarrow \mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}$

(iii)若$z=z_0$为极点时，求$\mathrm{Res}[f(z),z_0]$有以下几条规则

规则I　若z_0是$f(z)$的一级极点$\Rightarrow$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \qquad (4)$$

规则II　若z_0是$f(z)$的m级极点$\Rightarrow$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\} \quad (5)$$

事实上，由条件

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,(c_{-m}\neq 0)$$

以$(z-z_0)^m$乘上式两边,得

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$
$$+c_0(z-z_0)^m+\cdots$$

两边求$m-1$阶导数得

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}=(m-1)!c_{-1}+m!(z-z_0)+\cdots$$

$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}=(m-1)!c_{-1}$,移项得(5)式.

注： 当$m=1$时，式(5)即为式(4).

例 2 求下列各函数$f(z)$在奇点处的留数。

(1) $\dfrac{e^z}{z^2+1}$

解 $\because z=\pm i$是$\dfrac{e^z}{z^2+1}$的一级极点

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}[(z-i)f(z)]$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{e^z}{z+i}\right]=\frac{e^i}{2i}=-\frac{1}{2}ie^i=\frac{1}{2}(\sin 1-i\cos 1)$$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),-i]=\lim_{z\to -i}[(z+i)f(z)]$$

$$=\lim_{z\to -i}\left[\frac{e^z}{z-i}\right]=\frac{e^{-i}}{-2i}=\frac{1}{2}ie^{-i}=\frac{1}{2}(\sin 1+i\cos 1)$$

(2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 法一 $\because z=0$是$\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$的三级极点

$$\therefore \mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\{(z-0)^3 f(z)\}$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1-e^{2z}}{z}\right]=-\frac{4}{3}$$ 繁！

法二 利用洛朗级数

$$\because \frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left[1-\left(1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\cdots\right)\right]$$

$$=-\frac{2}{z^3}-\frac{2^2}{2!z^2}-\frac{2^3}{3!z}-\frac{2^4}{4!}-\frac{2^5}{5!}z-\cdots$$

$$\therefore \mathrm{Res}[f(z),0]=c_{-1}=-\frac{2^3}{3!}=-\frac{4}{3}$$

(3) $z^2\sin\frac{1}{z}$　　$\because z=0$是$z^2\sin\frac{1}{z}$的本性奇点,

利用洛朗级数

$$\because z^2\sin\frac{1}{z}=z^2[\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\frac{1}{7!z^7}+\cdots)]$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{7!z^5}+\cdots$$

$$\therefore \mathrm{Re}\,s[f(z),0]=c_{-1}=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$$

注：　要灵活运用规则及洛朗级数展开来求留数，不要死套规则。

(1)若$z=z_0$为可去奇点$\Rightarrow c_{-1}=0\Rightarrow \operatorname{Res}[f(z),z_0]=0$

(2)若$z=z_0$为本性奇点$\Rightarrow f(z)\overset{\text{展开}}{=}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}$$

(3)若z_0是$f(z)$的一级极点

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

(3)若z_0是$f(z)$的m级极点

$$(i)\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$$

(*ii*)**利用洛朗级数展开来求留数**

3、留数定理

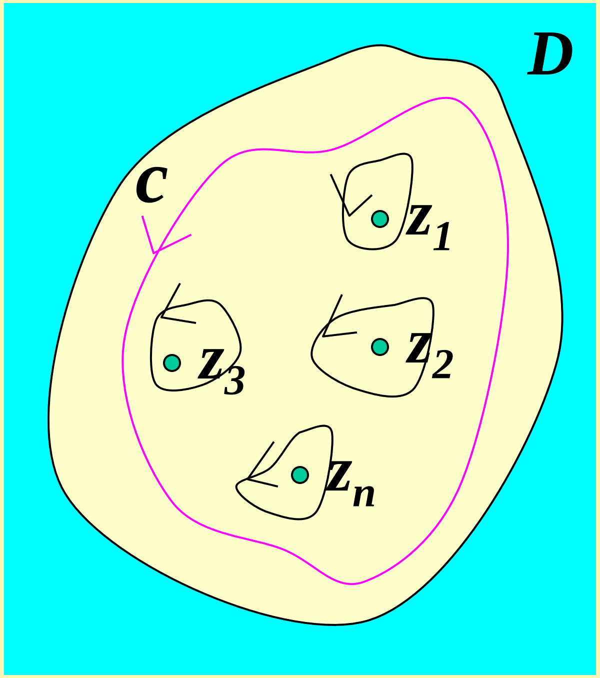
定理 设c是一条简单闭曲线，$f(z)$在c内有有限个弧立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$，除此以外，$f(z)$在c内及c上解析$\Rightarrow$

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, s[f(z), z_k] \qquad (3)$$

证明 用互不包含，互不相交的正向简单闭曲线c_k $(k = 1,2,\cdots n)$，将c内的弧立奇点z_k围绕，

由复合闭路定理得:

$$\oint_c f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \oint_{c_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_n} f(z)dz$$



用$2\pi i$除上式两边得:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_n} f(z)dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

故 $$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

得证!

注:求沿闭曲线c的积分,归之为求在c中各孤立奇点的留数。

NJUPT

例 3 计算下列各积分(利用留数,圆周均取正向)。

(1) 计算: $\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz$

解 $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|=2$ 的内部有一个一级极点

$z=0$ 和一个二级极点 $z=1$

由规则I

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{5z-2}{(z-1)^2}=-2$$

由规则II

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\right\}$$

$$=\lim_{z\to 1}\left(\frac{5z-2}{z}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{2}{z^2}=2$$

$$\therefore \oint_{|z|=2} f(z)dz=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]+2\pi i\operatorname{Res}[f(z),1]=0$$

$$(3)\ \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)(2z+1)^2}dz$$

解：原式 $= 2\pi i[\mathrm{Re}\,s(f(z),-1)+\mathrm{Re}\,s(f(z),-\frac{1}{2})]$

$$= 2\pi i\{\lim_{z\to -1}[(z+1)\frac{e^z}{(z+1)(2z+1)^2}] + \lim_{z\to -\frac{1}{2}}[(z+\frac{1}{2})^2\frac{e^z}{(z+1)(2z+1)^2}]'\}$$

$$= 2\pi i(e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$$

或 $= \oint_{|z+1|=r_1} \frac{\frac{e^z}{(2z+1)^2}}{z+1}dz + \oint_{|z+\frac{1}{2}|=r_2} \frac{\frac{e^z}{z+1}}{4(z+\frac{1}{2})^2}dz$

$$= 2\pi i\frac{e^z}{(2z+1)^2}\Big|_{z=-1} + 2\pi i\frac{1}{4}(\frac{e^z}{z+1})'\Big|_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi i(e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$$

(4) $\oint_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz$

解 $\because z=0$是$z^2\sin\frac{1}{z}$的本性奇点,

利用洛朗级数

$$\because z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\frac{1}{7!z^7}+\cdots)\right]$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{7!z^5}+\cdots$$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$$

$$\therefore 原式=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{\pi i}{3}$$

总结

1、会求孤立奇点及类型，并会求函数在孤立奇点的留数

2、利用留数定理计算 $\oint_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,s[f(z), z_k]$

习题 13.4