第10章　无穷级数

10.1 常数项级数的概念与性质

10.1.1 常数项级数的概念

10.1.2 常数项级数的性质

10.1、常数项级数的概念和性质

10.1.1、常数项级数的概念

1、定义 给定一个数列 u_1，u_2，u_3，…，u_n，…，则由这数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \qquad (1)$$

叫做（常数项）无穷级数，简称（数项）级数，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中u_n叫做级数的一般项或通项。

2、部分和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ (2)

s_n称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和。

无穷数列与无穷级数之关系：

由数列$\{u_n\}$→级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

由级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ → 数列$\{u_n\}$：u_1，u_2，…，u_n，…

→ 数列$\{s_n\}$：s_1，s_2，…，s_n，…

3、级数收敛的定义

定义： 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{s_n\}$有极限s（常数），

即$\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，

极限值s叫做这级数的和，并记作

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

如果$\{s_n\}$没有极限，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

当级数收敛时，其和s与部分和s_n之差

$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$(3) 叫做级数的余项。

显然，在级数收敛时， $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$

例 1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

解 如果$q \neq 1$时

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$= \frac{a - aq^n}{1-q}$$

$$= \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当$|q|<1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = 0$ $\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ 收敛

当$|q|>1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ $\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ 发散

如果$|q|=1$时

当$q=1$时, $s_n = na \to \infty$ 发散

当$q=-1$时, 级数变为$a-a+a-a+\cdots$

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n$不存在 发散

综上 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} 当|q|<1时, 收敛 \\ 当|q|\geq 1时, 发散 \end{cases}$

例 2 判别无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$的收敛性.

解 $\because \quad u_n = 2^{2n} 3^{1-n} = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$,

已知级数为等比级数,

公比$q = \frac{4}{3}$,

$\because |q| \geq 1$,

$\therefore$ 原级数发散.

例3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的敛散性。

解: $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$

所以 $u_1=\frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}),\ u_2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}),\ \cdots$

$$S_n=\frac{1}{2}[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$$

该级数收敛，其和等于 $\frac{1}{4}$

10.1.2、无穷级数的基本性质

性质 1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$亦收敛.

推论：级数的每一项同乘一个不为零的常数, 敛散性不变.

性质 2 设两收敛级数$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛, 其和为$s \pm \sigma$.

结论：收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

说明：

（i）两个收敛的级数可逐项相加减。

（ii）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$一个收敛，一个发散

则$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$发散。

（iii） 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都发散，

则$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$可能收敛，也可能发散

例 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$均发散，

但$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n+(-1)^{n+1}]=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty} n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})$也发散

性质3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不改变级数的收敛性。

即 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则 $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$ 也收敛$(k \geq 1)$.

且其逆亦真.

证明

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n}$$
$$= s_{n+k} - s_k ,$$

则 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+k} - \lim_{n\to\infty} s_k = s - s_k$.

类似地可以证明在级数前面加上有限项不影响级数的敛散性.

性质 4 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

证明 $$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

$$\sigma_1=s_2,\quad \sigma_2=s_5,\quad \sigma_3=s_9,$$

$$\cdots,\sigma_m=s_n,\quad \cdots$$

则 $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s.$

注意 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

$1-1+1-1+\cdots$ 发散

推论： 如果加括号后所成的级数发散，则原来的级数也发散。（反证法）

性质5 级数收敛的必要条件

级数收敛的必要条件:

当n无限增大时,它的一般项u_n趋于零,即

级数收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

证明 $\because \quad s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 则 $u_n = s_n - s_{n-1}$,

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s$

$= 0.$

注意

1. 如果级数的一般项不趋于零，则级数发散；

例如 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$ 发散

2. 必要条件不充分.

例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 但级数是否收敛?

讨论

$$\because \quad s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

假设调和级数收敛，其和为s.

于是$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=s-s=0,$

便有 $0\geq\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$ 这是不可能的.

$\therefore$ 级数发散.

10.2 常数项级数的审敛法

10.2.1 正项级数及其审敛法

10.2.2 交错级数及其审敛法

10.2.3 绝对收敛与条件收敛

10.2、常数项级数的审敛法

10.2.1、正项级数及其审敛法

1、正项级数收敛的充要条件

(1).定义: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项均有 $u_n \geq 0$,

这种级数称为正项级数.

(2).正项级数收敛的充要条件:

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则

部分和数列 $\{s_n\}$ 为单调增加数列.

定理 正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列 s_n 有界.

2、正项级数的几个审敛法

(1)、比较审敛法

(i)设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，

且$u_n \le v_n\ (n=1,2,\cdots)$，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

反之，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

证明 (1) 设$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ $\quad \because u_n \le v_n$,

且$s_n = u_1+u_2+\cdots+u_n \le v_1+v_2+\cdots+v_n \le \sigma$,

即部分和数列有界 $\quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 用反证法.

推论: 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛(发散)

且$v_n \le ku_n (n \ge N)(ku_n \le v_n)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛(发散).

比较审敛法的不便: 须有参考级数.

已知参考级数: 几何级数，调和级数.

例 1 讨论 P−级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

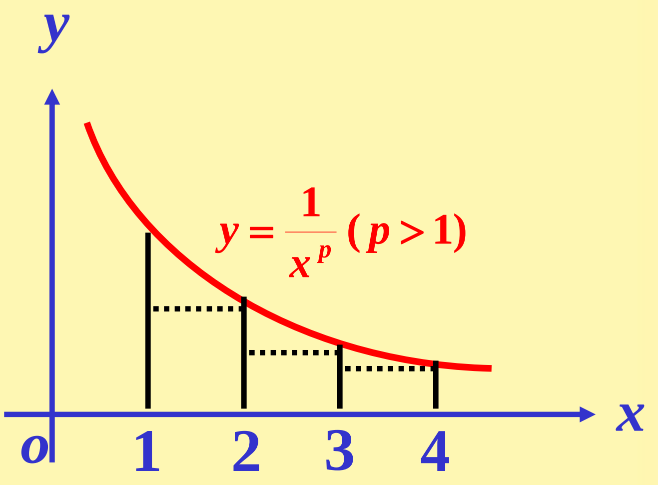
解 设 $p\le 1$, $\because \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, 则$P-$级数发散.

设 $p>1$, 由图可知

$$\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$

$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$



$$=1+\int_1^n \frac{dx}{x^p} \quad =1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}$$

即s_n有界， 则$P-$级数收敛.

$$P-\text{级数}\begin{cases}\text{当}p>1\text{时，收敛}\\ \text{当}p\le 1\text{时，发散}\end{cases}$$

重要参考级数：几何级数，P-级数，调和级数.

例 2 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的.

证明 $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$,

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散, $\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散.

对于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

由于$n^2-1 > \frac{n^2}{2}\ (n \geq 2)$ 故$u_n = \frac{1}{n^2-1} < \frac{2}{n^2}$

而$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛, 所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$收敛。

（ii）比较审敛法的极限形式：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,如果$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,

则(1) 当$0 < l < +\infty$时,二级数有相同的敛散性;

(2) 当$l = 0$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(3) 当$l = +\infty$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

证明　(1) 由$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$　对于$\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$,

$\exists N$,　当$n > N$时,　$l - \frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < l + \frac{l}{2}$

即 $\frac{l}{2} v_n < u_n < \frac{3l}{2} v_n \quad (n > N)$

由比较审敛法的推论, 得证.　(2),(3)证略

例3 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$

解: $\because n\to\infty,\quad \frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$ 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=1$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$ 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$

解: $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1,$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛, 故原级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ **解：** 由于 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$

所以原级数 发散。

注： 比较法中常用的“标准”：p-级数，调和级数，等比级数等。

例4 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln(\frac{n+1}{n})$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(\frac{n+1}{n})]$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{(n+1)/2}}$

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

解： $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$

所给级数收敛。

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right],$$

解： $u_n=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

取 $v_n=\frac{1}{n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{2}$

收敛知所给级数收敛。

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{(n+1)/2}}$$

解: $$u_n=\frac{n^{n-1}}{n^{n+1}\left(2+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{(n+1)/2}}$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\left(2+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{(n+1)/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=0$$ 故原级数收敛。

思考与练习

1.设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$都收敛.

思考与练习

1. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

证明: $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^2}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

注意: 反之不成立. 例如,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{发散}.$$

2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n v_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 都收敛.

证明: $\because \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + v_n)$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n v_n}$ 收敛.

又 $\frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + u_n\right)$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 收敛.

内容小结

1. $\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列$\{S_n\}$有极限

2. 收敛级数的性质

3. 级数收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

4、正项级数及其审敛法

（1）正项级数收敛的充要条件

正项级数收敛$\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列s_n有界.

（2）比较审敛法（不等式形式、极限形式）