(2). 比值审敛法(达朗贝尔 D'Alembert 判别法):

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数, 如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ (ρ数或$+\infty$)

则$\rho<1$时级数收敛; $\rho>1$时级数发散; $\rho=1$时失效.

证明 当ρ为有限数时, 对$\forall\varepsilon>0$,

$\exists N$, 当$n>N$时, 有$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$,

即 $\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon \quad (n>N)$

当$\rho<1$时, 取$\varepsilon<1-\rho$, 使$r=\varepsilon+\rho<1$,

$$u_{N+2}<ru_{N+1},\quad u_{N+3}<ru_{N+2}<r^2u_{N+1},\ \cdots,$$

$u_{N+m}<r^{m-1}u_{N+1}$, 而级数$\sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1}u_{N+1}$收敛,

$\therefore \sum_{m=1}^{\infty} u_{N+m} = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$收敛, 原级数收敛

当$\rho > 1$时, 取$\varepsilon < \rho - 1$, 使$r = \rho - \varepsilon > 1$,

当$n > N$时, $u_{n+1} > ru_n > u_n$, $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. 发散

比值审敛法的优点: 不必找参考级数.

两点注意:

1. 当$\rho = 1$时比值审敛法失效;

例 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散,

级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛,

$\left.\right\} (\rho = 1)$

2. 条件是充分的, 而非必要.

例 $\because u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \le \dfrac{3}{2^n} = v_n,$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛,

但 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)} = a_n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \dfrac{1}{6},$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \dfrac{3}{2}, \qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

例1 判断下列各级数的敛散性

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$,

解: $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^3}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right]=\frac{1}{2}$$ 所以$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$收敛。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$,

解: $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1}=0$$

所以原级数收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

解：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$ 故原级数收敛。

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$,

解：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} [\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \bullet \frac{n^2}{\ln n}] = 1$

比值法失效。

取$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

则$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} x^{-1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$ 所以原级数收敛。

注:1.因为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛，则$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

级数提供了求数列极限的有一种方法:

要求$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

2.用比值失效，一般用比较或定义。

(3)、根值审敛法（柯西判别法）

定理 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，

则当ρ<1时级数收敛， 当ρ>1时级数发散，

ρ=1时级数可能收敛也可能发散。

证明：(i) 当ρ<1时，取一适当小的正数ε，使ρ+ε= r <1。

$$\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon = r < 1$$

由极限定义，存在N，当$n \geq N$时有不等式，

即有 $u_n < r^n$，而$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$收敛，$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

(ii) 略

(iii) ρ=1时，仍以p-级数为例

例2　判别下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

解：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$　　故原级数收敛。

(2)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{8^{\ln n}}$

解：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{8^{\ln n}}} = \lim_{n\to\infty} [\frac{2}{8^{\frac{\ln n}{n}}}] = 2 > 1$

故原级数发散

总结：1　若能求出u_n关于$\frac{1}{n}$的阶，用比较判别法

2　当u_n含有$a^n, n^n, (f(n))^{g(n)}$时，用根值判别法。

3　当u_n含有$a^n, n^k, n^n, n!$时，用比值判别法

例3　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}[\sqrt{2}+(-1)^n]^n$的敛散性

解：$\frac{n^3}{3^n}[\sqrt{2}+(-1)^n]^n \le \frac{n^3}{3^n}[\sqrt{2}+1]^n = v_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$$　所以原级数收敛。

注意：两种方法结合使用。

10.2.2、交错级数

1 定义：交错级数：$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$

或 $-u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots$

其中 $u_k > 0$ ($k=1$，2，…)。

2 莱布尼兹定理：如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件

(i) $u_n \geq u_{n+1}$;

(ii) $u_n \to 0$ ($n \to \infty$)，则级数收敛，且其和

$$s \leq u_1,\ |r_n| \leq u_{n+1}$$

证明：$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

$$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

由前一式知$\{S_{2n}\}$单调增加，由后一式知$S_{2n} < u_1$。

由数列判敛的单调有界准则知:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$存在，记为$S$,则$S \le u_1$.

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$。

$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3} + \cdots$右端也是一交错级数,

它也满足收敛的两个条件，于是有 $|r_n| \le u_{n+1}$

例　交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$$ 收敛

更一般的结论：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当 $P>0$ 时收敛。

说明：单调减少不是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \quad (u_n>0)$ 收敛的必要条件。

10.2.3、条件收敛与绝对收敛

下面讨论一般项级数 $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$

其中u_n为任意实数。

1、定理 对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛。

证明： 令 $v_n=\dfrac{1}{2}(u_n+|u_n|)$，显然有$0\le v_n\le |u_n|$。

依正项级数的比较审敛法，知$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，

进而知 $\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$收敛，

另一方面，$u_n=2v_n-|u_n|$，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}2v_n-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$ 也收敛。

当$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛时，我们称任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛。

如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，我们称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛。

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ 绝对收敛；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛

注：当$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散时，我们一般不能确定$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散

但是,如果我们是用比值法或根值法判定$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散时，

则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定发散。

这是因为这两种审敛法判定级数发散的依据是$\rho>1$，

此时u_n不趋于0 ($n\to\infty$)，不满足级数收敛的必要条件。

例1 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$

解: $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ 所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$绝对收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

解: $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n \to \frac{e}{2}\ (n\to\infty),\quad \frac{e}{2}>1$

所以 $\lim_{n\to\infty}|u_n| \ne 0$ 该级数发散。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$

解: $|u_n| = \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}\ (n\to\infty)$ 原级数不绝对收敛

但$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=0$，且$\{\ln(1+\frac{1}{n})\}$单调递减，

所以原级数条件收敛。

（4）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

解： $\because\ \frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$　原级数不绝对收敛。

$\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$　设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$　$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

当$x>e$时，$f(x)$单调递减，

$\therefore\{u_n\}=\{\frac{\ln n}{n}\}$当$n>2$时单调递减

根据莱布尼茨判别法，原级数条件收敛。

内容小结

1、掌握正项级数的比较、比值、根值审敛法

2、掌握交错级数的莱布尼茨审敛法

3、会判别任意项级数的绝对收敛、条件收敛

习题10.2.