10.3　幂级数

10.3.1　函数项级数的概念

10.3.2　幂级数及其收敛性

10.3.3　幂级数的性质

10.3.1、函数项级数的概念

1. 定义: 设$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$是定义在$I\subseteq R$上的函数, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$

称为定义在区间I上的(函数项)无穷级数.

2. 收敛点与收敛域:

如果$x_0\in I$, 数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛,

则称x_0为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点, 否则称为发散点.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的所有收敛点的全体称为收敛域,

所有发散点的全体称为发散域.

NJUPT

3. 和函数:

在收敛域上, 函数项级数的和是x 的函数$s(x)$,
称$s(x)$为函数项级数的和函数.

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

(定义域是收敛域)

函数项级数的部分和 $s_n(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$

余项 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ (x在收敛域上)

例如级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots$,的收敛域

为$(-1,1)$,和函数$S(x)=\dfrac{1}{1-x}$,发散域为$|x|\geq 1$.

注意 函数项级数在某点x的收敛问题,实质上是数项级数的收敛问题.

10.3.2、幂级数及其收敛性

1. 定义： 形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$的级数称为幂级数.

当$x_0 = 0$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$， 其中$a_n$为幂级数系数.

任务：求幂级数的收敛域、和函数，并研究和函数的性质。

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$,

当$|x| < 1$时, 收敛; 当$|x| \geq 1$时, 发散;

收敛域$(-1,1)$; 发散域$(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;

2、阿贝尔定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛, 则

它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切x 处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则它在满足

不等式$|x| > |x_0|$的一切x 处发散.

证明 (1) $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛, $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$

$\exists M,$ 使得$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$\because$ 当$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$时，　等比级数$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$收敛，

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$收敛，　即级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；

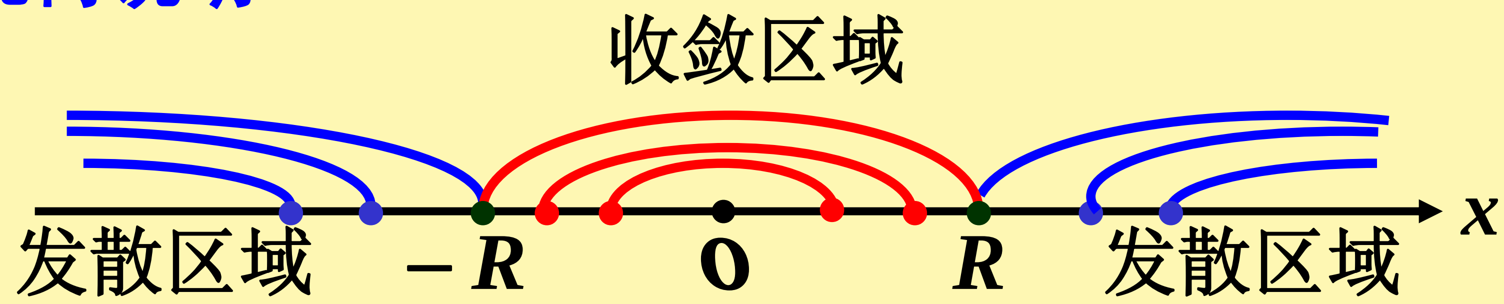
(2) 假设当$x = x_0$时发散，

而有一点x_1适合$\left|x_1\right| > \left|x_0\right|$使级数收敛，

由(1)结论　则级数当$x = x_0$时应收敛，

这与所设矛盾.

几何说明



推论 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一个完全确定的正数R存在, 它具有下列性质:

当$|x|<R$时, 幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$时,幂级数发散;

当$x=R$与$x=-R$时, 幂级数可能收敛也可能发散.

3、幂级数的收敛半径及收敛区间

定义：正数R称为幂级数的收敛半径.

$(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间.

注：幂级数的收敛域要讨论端点的收敛性.

规定 (1) 幂级数只在$x=0$处收敛,

$R=0$, 收敛域$x=0$;

(2) 幂级数对一切x 都收敛,

$R=+\infty$, 收敛域$(-\infty,+\infty)$.

对级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$以$|x-x_0|<R$收敛,$|x-x_0|>R$发散定义收敛半径。

4、收敛半径的求法

法一：公式法

定理 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ （或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$）

(1) 则当$\rho \neq 0$时, $R = \dfrac{1}{\rho}$; (2) 当$\rho = 0$时, $R = +\infty$;

(3) 当$\rho = +\infty$时, $R = 0$.

证明 对级数$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = \rho|x|,$$

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho\ (\rho \neq 0)$存在,

由比值审敛法，当$|x| < \dfrac{1}{\rho}$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛,

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛.

当$|x| > \dfrac{1}{\rho}$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散．收敛半径$R = \dfrac{1}{\rho}$;

(2) 如果$\rho = 0$, $\forall x \neq 0$,

有$\dfrac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} \to 0\ (n \to \infty)$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛,

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛． 收敛半径$R = +\infty$;

(3) 如果$\rho = +\infty$,

$\forall x \neq 0$, 级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$必发散.

收敛半径 $R = 0$. 定理证毕.

注: (1) 若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$,或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$不存在,

不可说幂级数没有收敛半径（一定有）

而是要用别的方法求R。

(2) a_n不能等于零。

例1　求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}x^n$$

解: $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}\Big/\frac{1}{n3^n}=\frac{1}{3}\quad R=3$

当$x=3$, 原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

当$x=-3$, 原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛 $\therefore$ 收敛域为$[-3,3)$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

解: $\because\ \rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty,\quad\therefore R=0,$

级数只在$x=0$点收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; 解：$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$

$\therefore R=+\infty,$ 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$.

解：$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2 \quad \therefore R=\frac{1}{2},$

即$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$收敛, $x\in(0,1)$收敛,

当$x=0$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 发散

当$x=1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 收敛 故收敛域为$(0,1]$.

法二：直接利用比值，根值判别法（有缺项）

例 2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\big/2^{n+1}}{x^{2n-1}\big/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2,$$

当 $\frac{1}{2}x^2 < 1$，即 $|x| < \sqrt{2}$ 时，级数收敛，

当 $\frac{1}{2}x^2 > 1$，即 $|x| > \sqrt{2}$ 时，级数发散，

当 $x = \sqrt{2}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$，级数发散，

当 $x = -\sqrt{2}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$，级数发散，

原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

10.3.3、幂级数的运算

1、代数运算性质:

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为$R_1$和$R_2$，

$R = \min\{R_1, R_2\}$

(1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_n \pm b_n$)

(2) 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0$)

2. 和函数的分析运算性质:

(1) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内连续,在端点收敛,则在端点单侧连续.

(2) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积,且对$\forall x \in (-R,R)$可逐项积分.

即 $$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$ (收敛半径不变)

(3) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导，并可逐项求导任意次.

即 $s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(收敛半径不变)

反复应用上述结论可得：

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为R，

则它的和函数$s(x)$ 在区间$(-R,R)$ 内具有任意阶导数。

例4 求下列幂级数的和函数

（1）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解 收敛域为：$(-1,1]$

$$\because s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad \text{显然 } s(0)=0,$$

$$s'(x)=1-x+x^2-\cdots=\frac{1}{1+x},$$

两边积分得 $\int_0^x s'(t)dt=\ln(1+x)$

即 $s(x)-s(0)=\ln(1+x)\quad \therefore s(x)=\ln(1+x),$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x).\quad(-1<x\le 1)$$

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$

解 收敛域为：$(-1,1)$

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$\because \sum_{n=0}^{\infty}2nx^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'$

$=\frac{2x}{(1-x)^2}$， $\because \sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$， $|x|<1$

$\therefore s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}$

$=\frac{1+x}{(1-x)^2}$. $|x|<1$

例 5　求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

解　考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，收敛域(-1,1),

则 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''$

$$=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=s\left(\frac{1}{2}\right)=8.$

注1: 求和函数的基本题型

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1},$$

注2: 一些变型:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}, \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}\text{等}$$

例. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求得收敛域为[-1,1),

当 $x \neq 0, S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad S(0)=1$

$$令S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad S_1(0)=0$$

$$令S_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

$$两边积分得\int_0^x S_1'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$$

$$S_1(x)-S_1(0)=-\ln(1-x)$$

$$\Rightarrow S_1(x)=-\ln(1-x)$$

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$$

注3: 可利用代数运算–拆项:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty}[n(n+1)-n]x^n$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} - x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'' - x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)',$$

$$= x(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1})'' - x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)',$$

$$= x(\frac{x^2}{1-x})'' - x(\frac{x}{1-x})' = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2}$$

内容小结

1. 会求幂级数的收敛半径、收敛域

2. 掌握幂级数的性质

3. 会求幂级数的和函数

习题10.3