10.4 函数展开成幂级数

10.4.1、泰勒级数

10.4.2、函数展开成幂级数

10.4.3 函数的幂级数展开式的应用(自学)

10.4.1、泰勒级数

1. 问题的引入

（1） 上一节主要讨论**幂级数的收敛域及和函数。**

反问题：给定一个函数$f(x)$,能否找到一个**幂级数，他在某区间上收敛，而其和函数恰是**$f(x)$.

若能找到这样的幂级数，则称函数$f(x)$在该区间上能展开成幂级数。

（2）第三章第三节泰勒公式中我们知道：

如果函数$f(x)$在含有x_0的某开区间(a,b)内有直至$(n+1)$阶的导数，则对(a,b)内任一点x，有

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (1)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

ξ是位于 x_0、x之间的某个值。

如果函数$f(x)$在含有x_0的某开区间(a,b)内各阶导数都存在，则$P_n(x)$的项可无限增加而得一幂级数：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (2)$$

幂级数（2）称为函数$f(x)$的泰勒级数。

问题：

1）此级数是否收敛？2）若收敛，和函数是否为$f(x)$?

3）若$f(x)$能展开幂级数是否还有其它形式?

2. 定理1 设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域$U(x_0)$内具有各阶导数，则$f(x)$在该邻域内能展开成幂(泰勒)级数的充要条件是$f(x)$的泰勒公式中的余项R_n（x）当$n\to\infty$时的极限为0，即：

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \qquad (x\in U(x_0))$$

证明：先证必要性。

设函数$f(x)$在$U(x_0)$上能展开成泰勒级数，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (2)$$

对一切$x\in U(x_0)$成立。

我们把$f(x)$的n阶泰勒公式（1）写成：

$$f(x)=s_{n+1}(x)+R_n(x)$$

其中$s_{n+1}(x)$是$f(x)$的泰勒级数的前$n+1$项的和。

因为$f(x)$在该邻域内能展开成泰勒级数（2），所以

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - s_{n+1}(x)] = 0$$

再证充分性：设$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$对一切$x \in U(x_0)$成立。

由$f(x)$的n阶泰勒公式 有：$s_{n+1}(x) = f(x) - R_n(x)$

所以 $\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - R_n(x)] = f(x)$

即函数$f(x)$的泰勒级数收敛，且收敛于$f(x)$。

在（2）式中若取$x_0=0$,得：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (3)$$

级数（3）称为函数$f(x)$的麦克劳林级数。

定理 2 如果函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内具有任意阶导数，且在$U_\delta(x_0)$内能展开成$(x-x_0)$的幂级数，

即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

则其系数 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

且展开式是唯一的.

证明 $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在$u_\delta(x_0)$内收敛于$f(x)$,即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

逐项求导任意次,得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots3\cdot2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

令 $x=x_0$, 即得

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$ 泰勒系数

泰勒系数是唯一的, $\therefore f(x)$的展开式是唯一的.

10.4.2、函数展开成幂级数

1 直接法：具体步骤如下：

（i） 求$f(x)$的各阶导数。

（ii） 求$f(x)$的各阶导数在$x=0$（$x=x_0$)处的值。

（iii） 写出$f(x)$所对应的幂级数，即麦克劳林（泰勒级数）：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

并写出其收敛半径R。

（iv）在（$-R,R$）内考察：$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$是否为零。

若为零，则在（$-R,R$）内有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

例1　将$f(x)=e^x$展开成x的幂级数

解　$f^{(n)}(x)=e^x\ (n=1,2\cdots)\Rightarrow f^{(n)}(0)=1\quad(n=1,2\cdots)$

得$f(x)$的麦克劳林级数：$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots$

它的收敛半径为$R=+\infty$

对任何有限的x,ξ(ξ是位于 0、x之间的某个值。

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

因为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛，所以$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$　即$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad x\in(-\infty,\infty)$

得展开式：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

例2 将$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数

解 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (n=1,2\cdots)$

得$f(x)$的麦克劳林级数:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

它的收敛半径为$R=+\infty$

对任何有限的x,ξ(ξ是位于 0、x之间的某个值)。

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin[\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$$

得展开式:$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$

$x\in(-\infty,+\infty)$

2　间接法：

（i）利用一些已知函数的幂级数展开式。

（ii）利用幂级数的运算（四则，逐项求导，逐项积分）。

（iii）变量代换。

例3　将$f(x)=\cos x$展开成x的幂级数

解　$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

上式对x求导（右端逐项求导）得　$x \in (-\infty,+\infty)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$x \in (-\infty,+\infty)$

例4　将$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数

解　$f'(x)=[\ln(1+x)]'=\dfrac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

将上式从0到x逐项积分：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (-1<x\le 1)$$

上式右端的幂级数在$x=1$收敛，而$\ln(1+x)$在$x=1$有定义且连续，所以展开式对$x=1$也是成立的，于是收敛域为$-1<x\le 1$.

利用此题可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

例5　将$f(x)=\arctan x$展开成x的幂级数

解　$f'(x)=[\arctan x]'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \qquad (|x|<1)$$

将上式从0到x逐项积分：

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$在$x=\pm1$处收敛，收敛域$|x|\le 1$

注：逐项积分逐项微分可能改变区间端点的收敛情况。

注　应熟记下列函数的幂级数展开式:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (|x|<1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad |x| < 1$$

m为任意实数。

例6 将$f(x)=x\ln x$在$x_0=1$处展开成幂级数

解 令$x-1=t$,

则 $f(x)=(t+1)\ln(t+1)=g(t)$在$t=0$点展开。

$$g'(t)=\ln(t+1)+1$$

$$=1+t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+\cdots \quad (-1<t\le 1)$$

两边从0到t积分:

$$g(t)-g(0)$$

$$=t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{2\cdot 3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)}+\cdots \quad (-1<t\le 1)$$

$$=t+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)}=t+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{t^{n}}{n(n-1)}$$

$$= t + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)} = t + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{t^{n}}{n(n-1)}$$

$$x\ln x = (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}(x-1)^n \qquad (0 < x \le 2)$$

例7　将$f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$x-1$的幂级数

解　因为$f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3} = \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$

$$= \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(3+x)} = \frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})} - \frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}$$

$$\frac{1}{4(1+\dfrac{x-1}{2})}$$

$$=\frac{1}{4}[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}\quad\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\qquad |\frac{x-1}{2}|<1,\text{即}-1<x<3$$

$$\frac{1}{8(1+\dfrac{x\quad 1}{4})}=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}$$

$$|\frac{x-1}{4}|<1,\text{即}\qquad -3<x<5$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n$$

收敛域为$\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$,即$-1<x<3$

或令$y=x-1$,则$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$

$$=\frac{1}{4(1+\frac{y}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{y}{4})}$$

化为展开成y的幂级数。

内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法

(2) 间接展开法

2. 常用函数的幂级数展开式

习题10.4

10.4.3 函数的幂级数展开式的应用

一、近似计算

1. 函数值的近似计算

有了幂级数的展开式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

可利用它进行函数值的近似计算。

常见的两类问题：

（1） 给定n,计算$f(x_1)$的近似值（x_1位于收敛区间内），并估计误差。

（2） 提出误差要求，计算$f(x_1)$的近似值。例P205,P206之例8，例9。

2. 定积分的近似计算

如果被积函数在积分区间上能展开成幂级数，则把这幂级数逐项积分，用积分后所得的级数就可算出定积分的近似值。例P207之例10。

二、欧拉公式

1 复数项级数的一般概念

考察复数项级数：

$$(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+\cdots+(u_n+iv_n)+\cdots \quad (1)$$

其中u_n,v_n为实常数。如果

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \quad (2)\text{和} \quad v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \quad (3)$$

分别收敛于u,v,则称级数（1）收敛，且和为$u+iv$

如果级数（1）各项的模构成的级数：

$$\sqrt{u_1^{\,2}+v_1^{\,2}}+\sqrt{u_2^{\,2}+v_2^{\,2}}+\cdots+\sqrt{u_n^{\,2}+v_n^{\,2}}\cdots \quad (4)\text{收敛，}$$

则称级数（1）绝对收敛。

显然，如（4）收敛，则（2），（3）也绝对收敛，从而级数（1）也收敛。

2 欧拉公式

考察$1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\frac{1}{n!}z^n+\cdots \qquad (z=x+iy) \qquad (5)$

其各项的模构成的级数：

$$1+r+\frac{1}{2!}r^2+\cdots\frac{1}{n!}r^n+\cdots \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (6)$$

易知其处处收敛，从而级数（5）在复平面上绝对收敛。

在x轴上（即$z=x$），级数（5）表示指数函数e^x，在复平面上，用它定义复变量的指数函数：

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots \frac{1}{n!}z^n + \cdots \qquad (|z| < +\infty) \qquad (7)$$

当$x=0$,即$z=iy$时，（7）式变为:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \cdots \frac{1}{n!}(iy)^n + \cdots$$

$$= 1 + iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots$$

$$= (1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 + \cdots) + i(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots)$$

$$= \cos y + i\sin y$$

将y换成x,得： $e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad (8)$

将x换成$-x$,得： $e^{-ix}=\cos x-i\sin x \quad (9)$

由（8），（9）可得：欧拉公式

$$\begin{cases} \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{cases} \qquad (10)$$