10.5　傅立叶级数

10.5.1、三角函数的正交性

10.5.2、将函数展开成傅立叶级数

10.5.3、正弦级数与余弦级数

10.5.4、以2l为周期的傅立叶级数

10.5.1、三角级数　三角函数系的正交性

1．三角级数

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ （谐波函数）

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期, A为振幅，ω为角频，φ为初相。

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underline{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)}$

（谐波迭加）

$$\underline{A_n \sin\varphi_n} \cos n\underline{\omega t} + \underline{A_n \cos\varphi_n} \sin n\underline{\omega t}$$

令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0$, $a_n = A_n \sin\varphi_n$, $b_n = A_n \cos\varphi_n$, $\omega t = x$

得函数项级数 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

称上述形式的级数为三角级数.

问题： 设$f(x)$是周期$T=2\pi$的周期函数，

1.$f(x)$满足什么条件，才能展开三角级数?

即：$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

2.若能展开, a_i, b_i是什么?

2. 三角函数系的正交性

三角函数系

$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cos nx,\sin nx,\cdots$具有下列两条性质

1.(正交性)任意两个不同函数在$[-\pi,\pi]$上的积分等于零

2.两个相同函数在$[-\pi,\pi]$上的积分不等于零

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

即: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \ (n = 1,2,3,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0. \quad (其中 m, n = 1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases},$$

证明: $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]dx$$

$$=0\qquad(m\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos 2nx+1\right]dx=\pi$$

其它类似证明

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]$$

10.5.2、函数展开成傅里叶级数

1.定理. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \quad ①$$

且右端级数可逐项积分，则有

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

证明: 先求 a_0

由定理条件，对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)]dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{k=1}^{\infty}[\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kxdx]$$

(利用正交性)

$$= \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

再求求a_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx]$$

$$= a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = a_n\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

类似求b_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx dx]$$

$$= b_n\pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases} \quad ②$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \quad ①$$

由公式②确定的a_n, b_n 称为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数；

以$f(x)$ 的傅里 叶系数为系数的三角级数①称为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

问题: $f(x)\ \underline{\underline{条件?}}\ \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

2. 狄利克雷(Dirichlet)收敛定理:

设 $f(x)$ 是周期为2π的周期函数，且满足:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$= s(x) = \begin{cases} f(x),\ x\text{为}f(x)\text{的连续点;} \\ \dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\ x\text{为第一类间断点} \end{cases}$$

3:将定义在（$-\infty$，∞）上的 以2π为周期的函数$f(x)$展开成傅立叶级数的步骤:

(i)先求傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

(ii) 写出对应的傅里叶级数

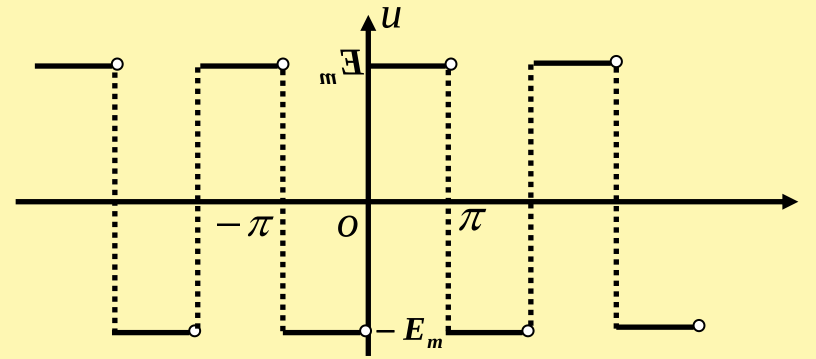
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(iii)根据收敛定理把上式写成等式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad x \in 连续点$$

例 1 以2π为周期的矩形脉冲的波形

$$u(t)=\begin{cases} E_m, & 0\le t<\pi \\ -E_m, & -\pi\le t<0 \end{cases}$$



将其展开为傅立叶级数.

解

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-E_m)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_m dt=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos ntdt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-E_m)\cos ntdt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_m\cos ntdt$$

$$=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\sin nt dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-E_m)\sin nt dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_m\sin nt dt$$

$$=\frac{2E_m}{n\pi}(1-\cos n\pi)\quad=\frac{2E_m}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

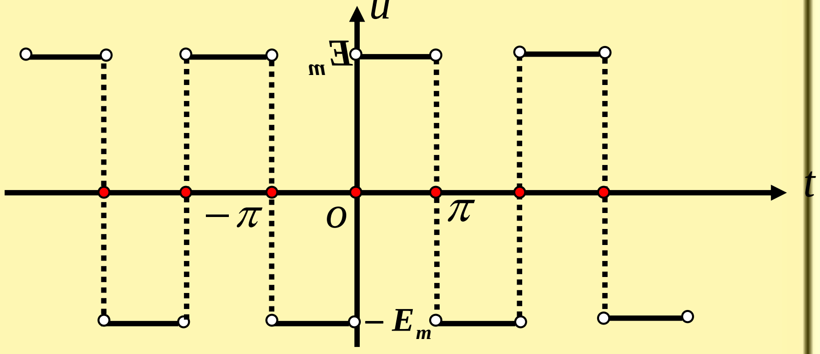
$$=\begin{cases}\dfrac{4E_m}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1, k=1,2,\cdots\\ 0, & n=2k, k=1,2,\cdots\end{cases}$$

所给函数满足狄利克雷充分条件.

在点$t = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$处不连续.

收敛于$\dfrac{-E_m + E_m}{2} = \dfrac{E_m + (-E_m)}{2} = 0,$

和函数图象为



所求函数的傅氏展开式为

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E_m}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin nt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4E_m}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)t$$

$$(-\infty < t < +\infty; t \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

如何将定义在$[-\pi,\pi]$上的函数展成傅里叶级数?

注意: 对于非周期函数,如果函数 $f(x)$ 只在区间$[-\pi,\pi]$上有定义,并且满足狄氏充分条件,也可展开成傅氏级数.

作法:

(1)周期延拓$(T=2\pi)F(x)=f(x) \quad (-\pi,\pi]([-\pi,\pi))$

(2)将$F(x)$展开成傅里叶级数 ($F(x)$的傅立叶系数与$f(x)$的傅立叶系数相同)

(3)限制x在$(-\pi,\pi)$内，就得到$f(x)$的傅里叶级数展开式，收敛性的讨论仅在$[-\pi,\pi]$上进行，在$x=\pm\pi$处，级数收敛于

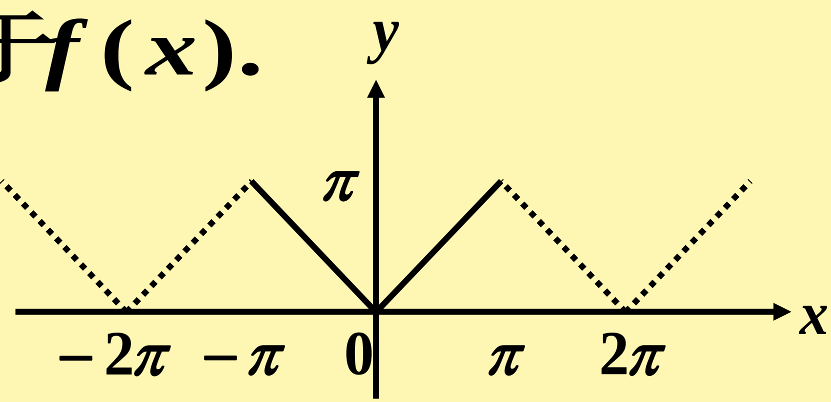
$$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$$

例2 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为傅立叶级数.

解 (i) 拓广的周期函数如图:

它的的傅氏级数展开式在

$[-\pi,\pi]$上收敛于$f(x)$.



(ii)求系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} xd\sin nx + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} xd\sin nx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}]$$

$$+ \frac{1}{n\pi}[x\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1, k=1,2,\cdots \\ 0, & n=2k, k=1,2,\cdots \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx=0,$$

$(n=1,2,3,\cdots)$

(*iii*)所求函数的傅氏展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\cos nx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

$(-\pi\le x\le\pi)$

$$\because \quad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,$$

当$x=0$时，$f(0)=0$，
$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

设 $\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\left(=\frac{\pi^2}{8}\right),$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots,\quad \sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

$$\because \sigma_2=\frac{\sigma}{4}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4},\quad \therefore \sigma_2=\frac{\sigma_1}{3}=\frac{\pi^2}{24},$$

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\frac{\pi^2}{6},\quad \sigma_3=\sigma_1-\sigma_2=\frac{\pi^2}{12}.$$

注：利用傅里叶级数求数项级数的和

10.5.3 正弦级数和余弦级数

1、奇函数和偶函数的傅里叶级数

一般说来,一个函数的傅里叶级数既含有正弦项,又含有余弦项.但是,也有一些函数的傅里叶级数只含有正弦项或者只含有常数项和余弦项.

(1) 当周期为2π的奇函数$f(x)$展开成傅里叶级数时, 它的傅里叶系数为

$$a_n = 0 \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

(2) 当周期为2π的偶函数$f(x)$展开成傅里叶级数时，它的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

证明　(1) 设$f(x)$是奇函数,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{奇函数}}\,dx = 0 \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{偶函数}} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

同理可证(2)　　　　　　定理证毕.

定义 如果 $f(x)$ 为奇函数, 傅氏级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为**正弦级数**.

如果 $f(x)$ 为偶函数, 傅氏级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 称为**余弦级数**.

例 3 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，将 $f(x)$ 展开成傅氏级数.

解 $\because$ $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，

$$\therefore a_n = 0, \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \qquad (n=1,2,\cdots)$$

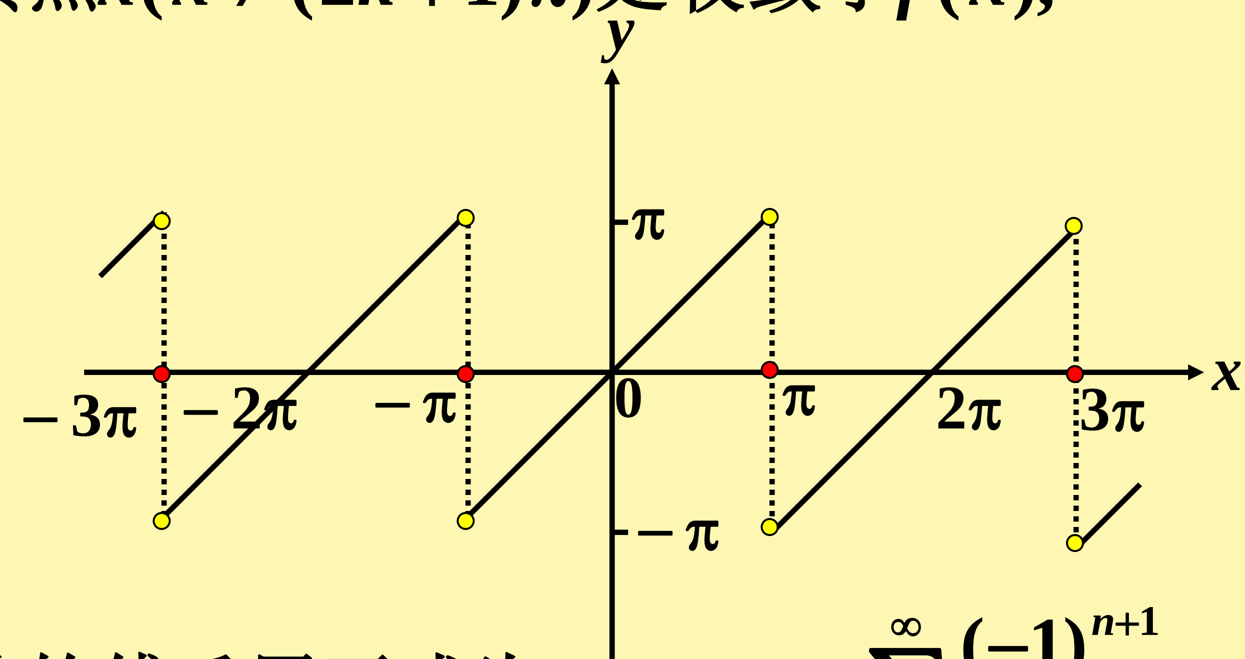
所给函数满足狄利克雷充分条件.

在点$x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处不连续,

收敛于$\dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\dfrac{\pi+(-\pi)}{2}=0,$

在连续点$x(x\neq(2k+1)\pi)$处收敛于$f(x)$,

和函数图象



所求函数的傅氏展开式为 $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$

$(-\infty<x<+\infty;\ x\neq\pm\pi,\pm3\pi,\cdots)$

2、函数展开成正弦级数或余弦级数

将定义在$[0,\pi]$上的$f(x)$，展开成正弦或余弦级数

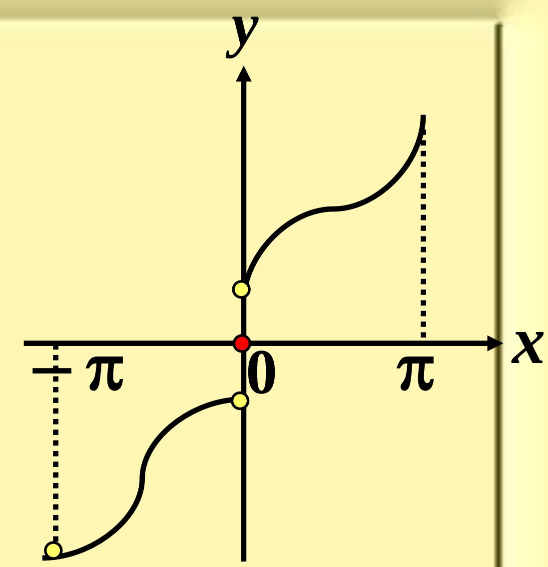
作法：将$f(x)$延拓成以2π为周期的函数$F(x)$：

令 $F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le \pi \\ g(x) & -\pi<x<0 \end{cases}$，且$F(x+2\pi)=F(x)$，

则有如下两种情况 $\begin{cases} \text{奇延拓} \\ \text{偶延拓} \end{cases}$.

1.将定义在$[0,\pi]$上的$f(x)$，展开成正弦级数:

(*i*) **奇延拓:** $g(x) = -f(-x)$



$$\text{则} F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x \le \pi \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$(ii)\text{求系数} \begin{cases} a_n = 0, n = 0,1,2\cdots \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

$f(x)$的傅氏正弦级数

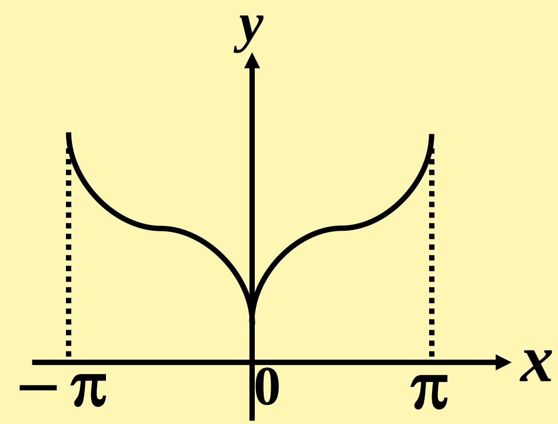
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

(*iii*)限制在[0, π]再用收敛定理得到*f*(*x*)的傅立叶级 数展开式。

2.将定义在$[0,\pi]$上的$f(x)$,展开成余弦级数:

(*i*)偶延拓: $g(x) = f(-x)$

则$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$



(*ii*)$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = 0, n = 1,2\cdots \end{cases}$

$f(x)$的傅氏余弦级数 $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

(*iii*)限制在[0, π]再用收敛定理得到$f(x)$的傅立叶级数展开式。

例 4 将函数 $f(x)=x+1\,(0\le x\le \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 求正弦级数. 对$f(x)$进行奇延拓, 再作周期延拓

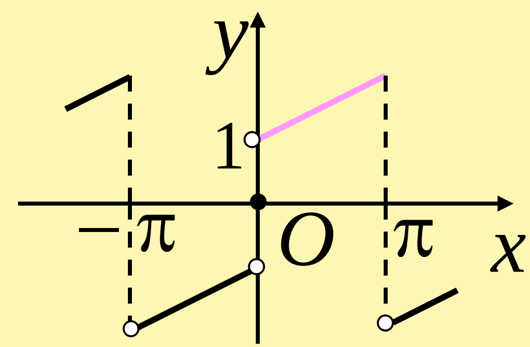
$$a_n=0,n=1,2\cdots$$

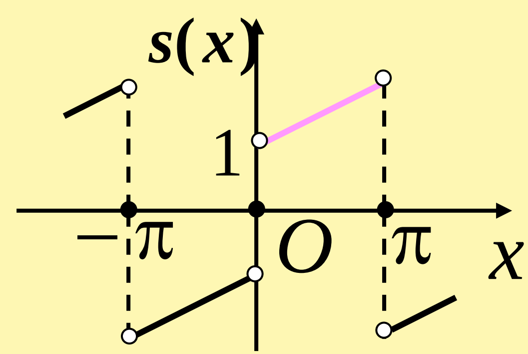
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(\pi+1)(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{n} & \text{当}n=1,3,5,\cdots\\[2ex] -\dfrac{2}{n} & \text{当}n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$



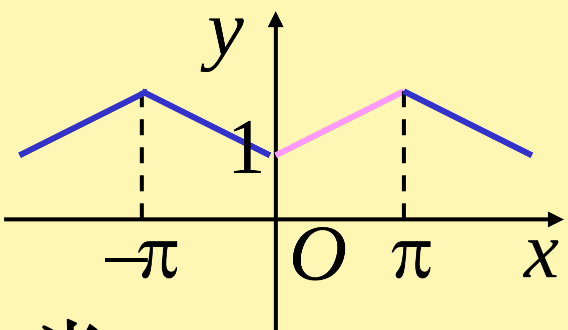


$$f(x)=x+1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[1-(\pi+1)(-1)^n]\sin nx \quad (0<x<\pi)$$

$$=\frac{2}{\pi}[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\cdots]$$

(2) 求余弦级数. 对$f(x)$进行偶延拓, 再作周期延拓

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2,$$



$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0 & 当n=2,4,6,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & 当n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \quad (0\le x\le\pi)$$

内容小结

1. 周期为 2π 的函数的傅里叶级数的收敛定理

条件：$f(x)$ 在一个周期上（1）连续或仅有限个第一类间断点；（2）至多有限个极值点。

结论：$f(x)$ 可展开成傅里叶级数，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=s(x)=\begin{cases} f(x),\ x\text{为}f(x)\text{的连续点}; \\ \dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\ x\text{为第一类间断点} \\ \dfrac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)],\ x=\pm\pi \end{cases}$$

2.将$f(x)$展开傅立叶级数有以下三种情况：

(1) 将定义在（–∞，∞）上的 以2π为周期的函数$f(x)$展开成傅立叶级数。

方法：计算$f(x)$的傅立叶系数后得到$f(x)$的傅立叶级数，再用收敛定理得到$f(x)$的傅立叶级数展开式。

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

(2) 将定义在[-π， π]上的 函数$f(x)$ 展开成傅立叶级数。

方法：应对$f(x)$作周期为2π的周期延拓得定义在（–∞，∞）上的周期函数$F(x)$, $F(x)$的傅立叶级数与

f(*x*)的傅立叶级数相同，限制在[-π， π]再用收敛定理得到*f*(*x*)的傅立叶级数展开式。

(3) 将定义在[0， π]上的 函数*f*(*x*) 展开成正弦（余弦）级数。

方法：应对*f*(*x*)作奇延拓（或偶延拓），再作周期延拓得定义在（–∞，∞）上的周期函数*F*(*x*), *F*(*x*)的傅立叶级数即为正弦级数（或余弦级数），限制在[0, π]再用收敛定理得到*f*(*x*)的正弦级数（或余弦级数）展开式。

正弦级数:$\sum_{n-1}^{\infty} b_n \sin nx, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$

余弦级数:$\frac{a_0}{2} + \sum_{n-1}^{\infty} a_n \cos nx, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$

习题 10.5