10.6 周期为2l的周期函数的傅里叶级数

10.6.1、以2L为周期的傅氏级数

1 定理 设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足收敛定理的条件,则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),$$

其中系数a_n, b_n为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

证明 令$z=\dfrac{\pi x}{l}$, $\quad -l\le x\le l \quad \Rightarrow -\pi\le z\le\pi$,

设$f(x)=f(\dfrac{lz}{\pi})=F(z)$, $F(z)$以2π为周期.

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz),$$

其中 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz\,dz,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz\,dz.$$

$$\because z=\frac{\pi x}{l}\quad F(z)=f(x)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz dz$$

$$\underline{\underline{z=\frac{\pi x}{l}}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}F(z)\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,$$

同理：$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

注 (1) 如果$f(x)$为奇函数，则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数b_n为$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$

$$(n=1,2,\cdots)$$

(2) 如果$f(x)$为偶函数，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数a_n为$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

(3).同样有收敛定理

条件：$f(x)$在一个周期上（1）连续或仅有限个第一类间断点；（2）至多有限个极值点。

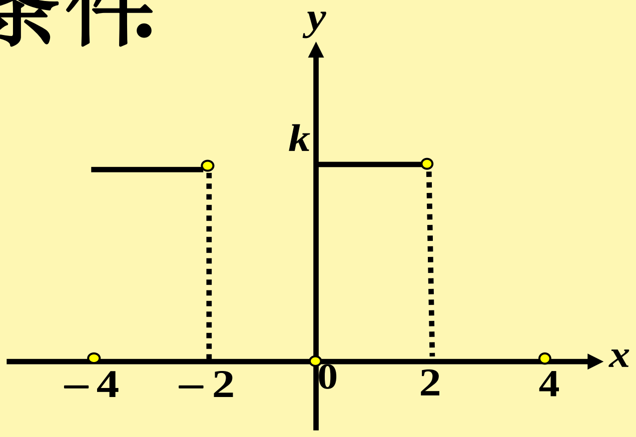
结论：$f(x)$可展开成傅里叶级数，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

$$=s(x)=\begin{cases} f(x), x\text{为}f(x)\text{的连续点;} \\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], x\text{为第一类间断点} \\ \frac{1}{2}[f(-l+0)+f(l-0)], x=\pm l \end{cases}$$

例 1 设 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,它在 $[-2,2)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}$, 将其展成傅氏级数.

解 $\because l=2$, 满足狄氏充分条件



$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx$$

$$=k,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = 0,\quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2k}{n\pi} & 当 n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & 当 n = 2,4,6,\cdots \end{cases},$$

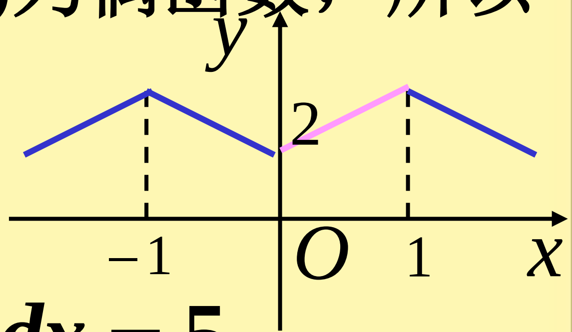
$$\therefore\ f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

$$(-\infty < x < +\infty;\ x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \cdots)$$

例2 将$f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$展开成以2为周期的傅里叶级数。

解 将$f(x)$以2为周期延拓，因为$f(x)$为偶函数，所以



$$b_n=0, n=1,2\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=2\int_0^1(2+x)dx=5$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx$$

$$=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\qquad(n=1,2,3\cdots)$$

由于对$f(x)$作周期为2的周期延拓得定义在（$-\infty$，∞）上的周期函数$F(x)$处处连续，故$f(x)$的傅立叶级数展开式为：

$$f(x)=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos n\pi x \qquad (-1\le x\le 1)$$

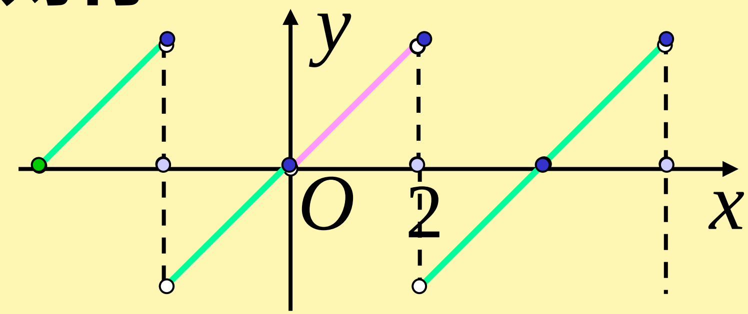
$$=\frac{5}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\pi x \qquad (-1\le x\le 1)$$

例3. 把 $f(x)=x\quad(0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数; (2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

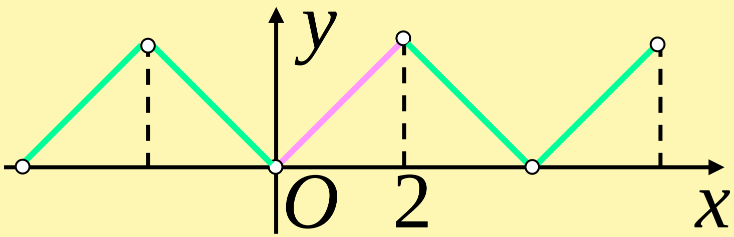
$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\qquad(0<x<2)$$

(2) 将$f(x)$作偶周期延拓, 则有



$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x=2$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$

傅立叶级数小结

1.收敛定理

条件：$f(x)$在一个周期上（1）连续或仅有限个第一类间断点；（2）至多有限个极值点。

结论：$f(x)$可展开成傅里叶级数，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=s(x)=\begin{cases} f(x),\ x\text{为}f(x)\text{的连续点;} \\ \dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\ x\text{为第一类间断点} \\ \dfrac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)],\ x=\pm\pi \end{cases}$$

题目类型：

1\. 给定$f(x)$，将其展开成傅里叶级数.三种情况：

(1) 将定义在（$-\infty$，∞）上的 以2π（$2l$）为周期的函数$f(x)$ 展开成傅立叶级数。

(2) 将定义在$[-\pi,\ \pi]$（$[-l,l]$）上的 函数$f(x)$ 展开成傅立叶级数。

(3) 将定义在$[0,\ \pi]$（（$0,\ \pi$），$[0,\ l]$, $(0,l)$）上的 函数$f(x)$ 展开成正弦（余弦）级数。

2\. 给定$f(x)$，求$f(x)$的傅里叶级数在x_0处收敛于何值

3\. 某些数项级数之和。

例1 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$(-\pi, \pi]$上定义为
$$f(x)=\begin{cases}2, & -\pi < x \le 0\\ x^2, & 0 < x \le \pi\end{cases},$$ 则$f(x)$的傅里叶级数在$x=\pi$处收敛于________；在$x=0$处收敛于________；在$x=200\pi$处收敛于________；在$x=5\pi/2$处收敛于________.

解： $f(x)$满足收敛定理的条件，

$$s(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{1}{2}[2+\pi^2]$$

$$s(0)=\frac{1}{2}[f(0-0)+f(0+0)]=1;$$

$$s(200\pi)=s(0)=1,\ s(\frac{5}{2}\pi)=s(\frac{1}{2}\pi+2\pi)=s(\frac{1}{2}\pi)=\frac{\pi^2}{4}。$$

NJUPT

例2 设$f(x)=x^2, 0\le x\le 1$, (1) 若$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$

其中$b_n=2\int_0^1 x^2 \sin n\pi x dx, n=1,2,3\cdots$ 则$s(-\frac{1}{2})=?$

(2)若$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$其中$a_n=2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx$

则$s(-\frac{1}{2})=?$　　$s(-\frac{7}{2})=?$

解　(1) $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$

是对$f(x)$进行奇延拓后展成的正弦级,故

$$s(-\frac{1}{2})=-s(\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2})^2=-\frac{1}{4}$$

(2) $s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$　是对$f(x)$偶延拓后展成的余弦级数

$$s(-\frac{1}{2})=s(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}, s(-\frac{7}{2})=s(-\frac{7}{2}+4)=s(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

例3、将$f(x)=\pi-x(0\le x\le\pi)$展开成余弦正弦级数

解：$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\pi$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx dx=-\frac{2}{n\pi}[\frac{(-1)^n-1}{n}],n=1,2....$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum-\frac{2}{n\pi}[\frac{(-1)^n-1}{n}]\cos nx,0\le x\le\pi$$

正弦级数:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx=\frac{2}{n}\qquad n=1,2\cdots$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx\qquad x\in(0,\pi]$$