第8章　重积分

8.1　　二重积分的概念与性质

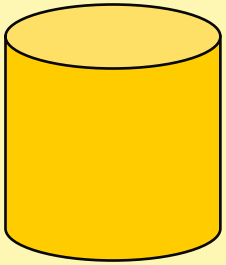
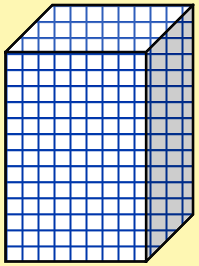
8.1.1　重积分的定义

8.1.2　重积分的性质

8.1.1 重积分的定义

一、二重积分的概念

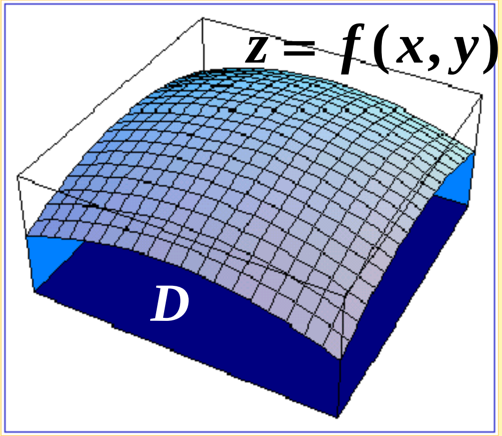
1. 曲顶柱体的体积

柱体体积=底面积× 高

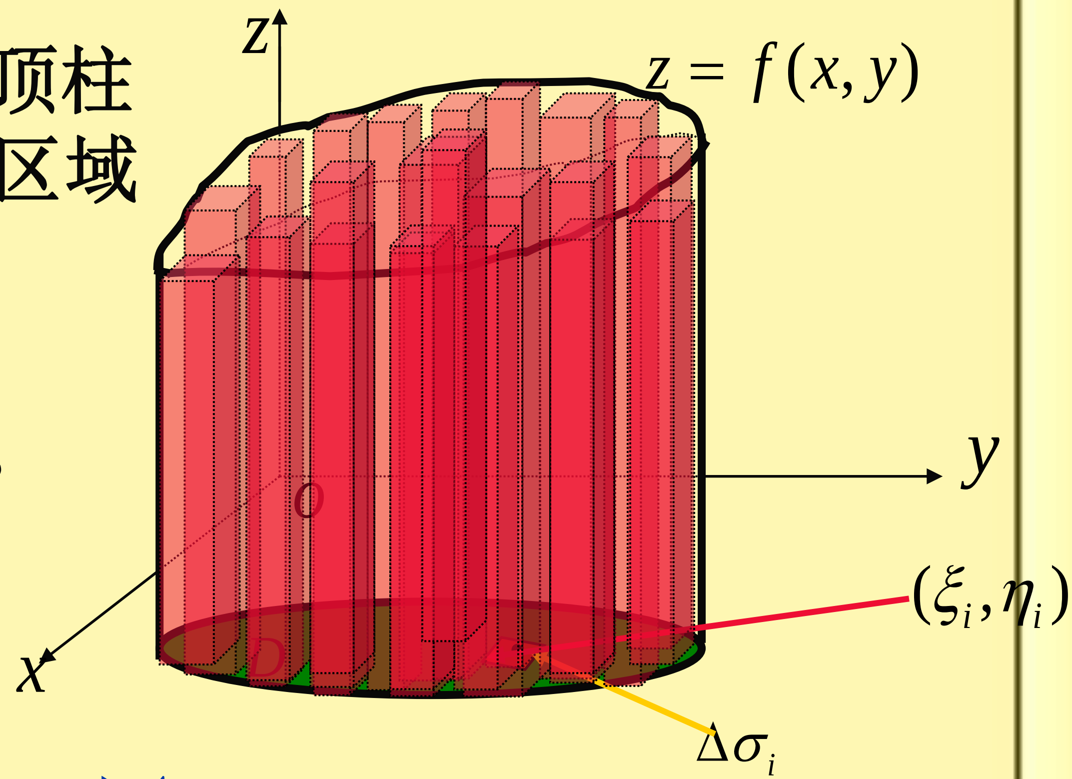
特点：平顶.

设有一立体，它的底是xOy面上的闭区域D，它的侧面是以D的边界为准线而母线平行于z轴的柱面，它的顶是曲面$z=f(x,y)$，这里$f(x,y)\geq 0$且在D上连续（如图）。这种立体叫做曲顶柱体。



步骤如下：

（1）分割：先分割曲顶柱体的底，分成**n**个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots \Delta\sigma_n$。



（2）近似：用小平顶柱体体积之近似表示小曲顶柱体的体积，

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

（3）求和 $V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$

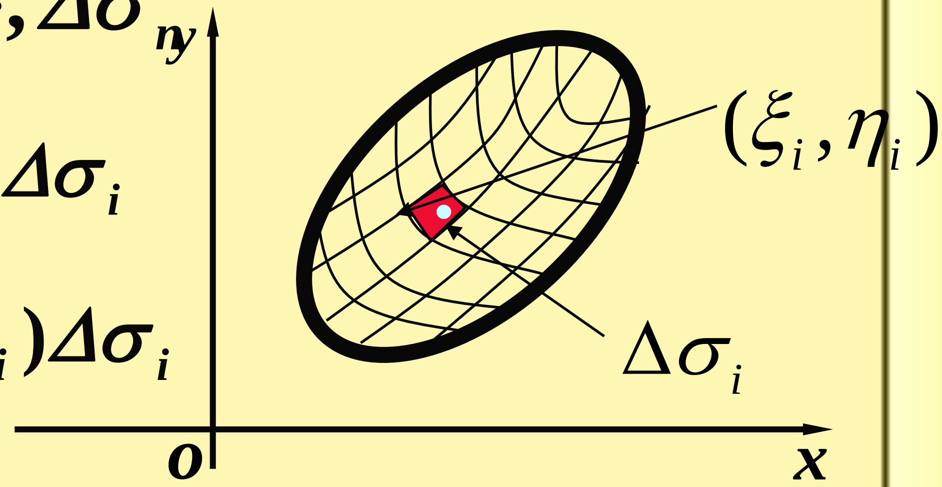
（4）取极限

曲顶柱体的体积 $V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$

2．求平面薄片的质量

设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在D上连续，平面薄片的质量为多少？

（1）分割　$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$



（2）近似　$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

（3）求和　$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

（4）取极限

$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

3. 二重积分的定义

定义8.1.1 设$f(x,y)$是有界闭区域上的有界函数，将区域任意分割成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域, 也表示它的面积。

任取$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma,(i=1,2,\cdots n)$, 作积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma,$

并求和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma$

如果当各小区域直径的最大值λ趋于零时，上述和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分，记作 $\iint_D f(x,y)d\sigma$,即

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域　被积函数　积分变量　被积表达式　面积元素　积分和

注： 如果用平行于坐标轴的直线网划分区域D，则除边界上的一些小区域外其余小闭区域都是小矩形。

$$d\sigma = dxdy$$ ------直角坐标系中的面积元素

4. 几个问题

（1） 可积性 $f(x,y)$在D上连续$\Rightarrow f(x,y)$在D上可积

(2) 由定义 $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ \ m=\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma.$

（3）几何意义:

$f(x,y)\geq 0$时,二重积分表示曲顶柱体的体积。

$f(x,y)\leq 0$时,二重积分表示曲顶柱体的体积的负值。

$f(x,y)$在D上变号时，二重积分表示曲顶柱体的体积的代数和。

下面我们再给出重积分的定义。

定义8.1.2 设Ω是R^n中一个可求体积（n=2时为面积）的有界闭区域，$f(X)$是在Ω上有定义的有界函数，将Ω分割为彼此没有公共内点的任意闭子域

$$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\cdots,\Omega_n$$

用λ表示各Ω_i中直径的最大值，Δv_i(或$\Delta\sigma_i$)表示Ω_i的体积(或面积)。

任取点$X_i\in\Omega_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，作积$f(X_i)\Delta v_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，并作和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(X_i)\Delta V_i$ (或 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(X_i)\Delta\sigma_i$)

如果当$\lambda\to 0$时，上述和式的极限存在，并且该极限与Ω的分割方式及X_i的取法无关，我们称该极限值为函数$f(X)$在Ω上的n(重)积分，记为

$$\int_{\Omega} f(X)dX$$

其中$f(X)$称为被积函数，Ω称为积分区域，也称函数$f(X)$在Ω上可积。

特别地，当n=2时函数 $f(X)= f(x,y)$ $(x,y)\in D$，

$$\int_{\Omega} f(X)dX = \iint_{D} f(x,y)d\sigma$$

即为函数$f(x,y)$ 在D 上的二重积分，$d\sigma$称为面积元素。

当n=3时函数 $f(X)= f(x,y,z)\ (x,y,z)\in\Omega$,

$$\int_{\Omega} f(X)dX = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

即为函数$f(x,y,z)$ 在Ω上的三重积分，dv称为体积元素。

有了上述定义，空间立体的质量也可以通过密度函数的三重积分来表示，即

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\Delta v_i$$

8.1.2　重积分的性质

我们仅给出二重积分的性质，三重积分的性质完全类似。

假设性质中涉及的函数在相应区域上均可积，D、D_1、D_2都是平面上的有界闭区域。

(1)　$\sigma = \iint\limits_D 1 \cdot d\sigma = \iint\limits_D d\sigma$　σ表示D的面积

(2)　(关于被积函数的线性可加性）若α、β为常数，则

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)] d\sigma = \alpha \iint\limits_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint\limits_D g(x,y) d\sigma$$

(3)（关于积分区域的可加性）

若$D=D_1\cup D_2$，且D_1与D_2 无公共内点，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

(4)（积分不等式）如果在D上有$f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D g(x,y)d\sigma$$

特别地，有

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint_D |f(x,y)|d\sigma$$

(5)（估值定理）设*M*、*m*分别是*f*(*x*,*y*)在有界闭区域*D*上的最大值和最小值，σ表示*D*的面积，则

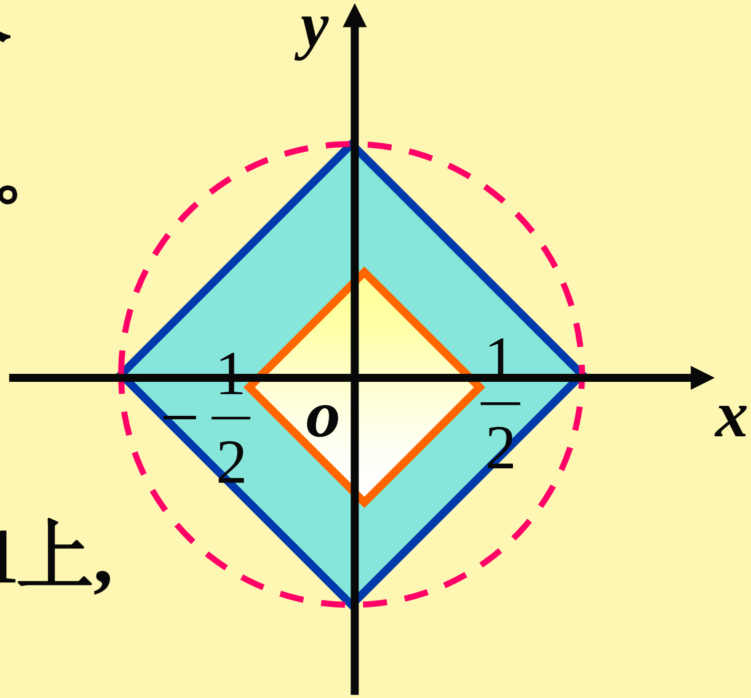
$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

(6)（中值定理）设函数*f*(*x*,*y*)在有界闭区域*D*上连续， σ表示*D*的面积，则至少存在一点(ξ,η)，使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

例1 不用计算,判断二重积分

$$\iint\limits_{\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)d\sigma$$ 的符号。



解 先作出积分区域D:

在积分区域D: $\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1$上,

除四个顶点外,全部落在圆周$x^2+y^2=1$之内,

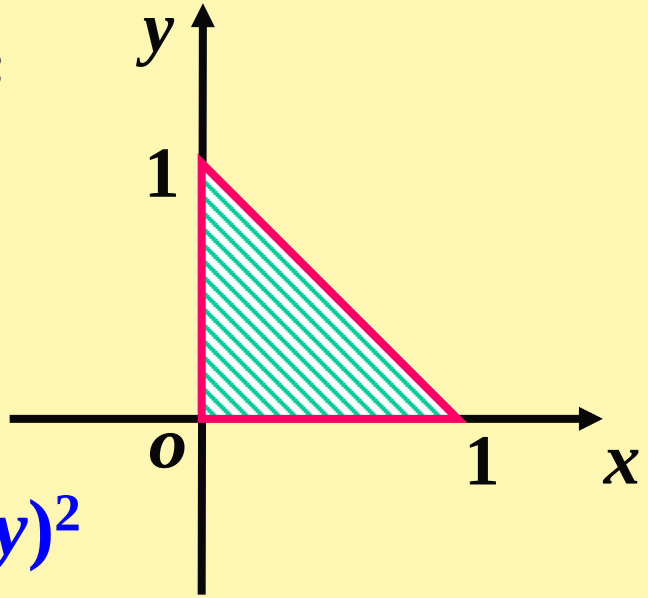
因而在区域$\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1$上有 $\ln(x^2+y^2)\le 0$。

于是有: $$\iint\limits_{\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)d\sigma\le 0。$$

例2 比较 $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小。

(1) D_1：x轴、y轴及$x+y=1$所围；

(2) D_2：$(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$



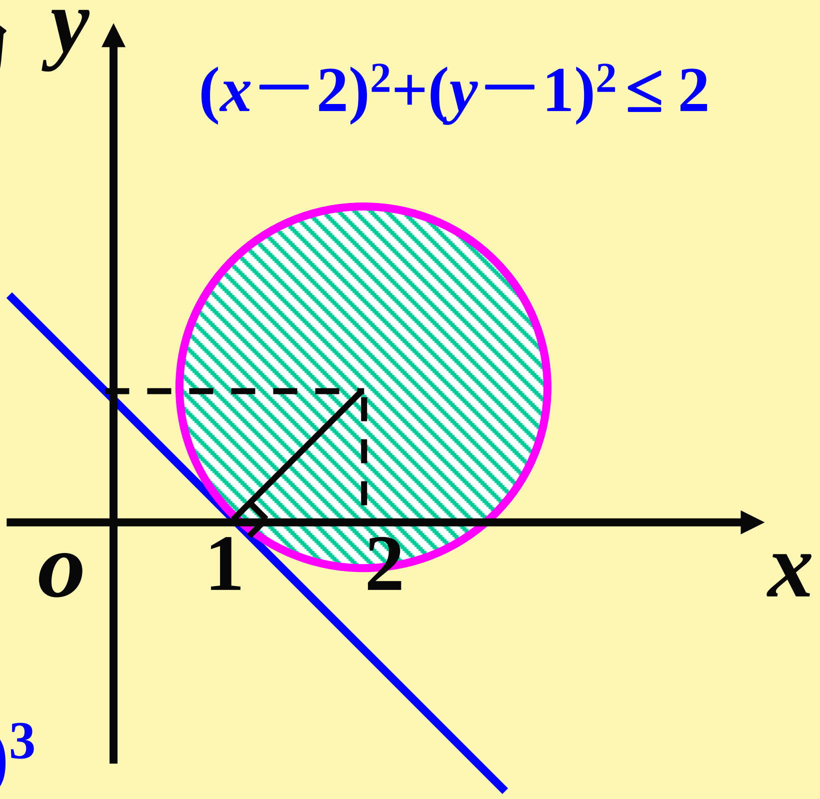
解 (1)因为在区域D_1上

$0 \le x+y \le 1$，$\Rightarrow (x+y)^3 \le (x+y)^2$

根据性质4，得

$$\iint\limits_{D_1} (x+y)^3 d\sigma \le \iint\limits_{D_1} (x+y)^2 d\sigma \text{ 。}$$

(2)因为区域D_2是以(2,1)为圆心,以$\sqrt{2}$为半径的圆域



该圆域与直线$x+y=1$相切。

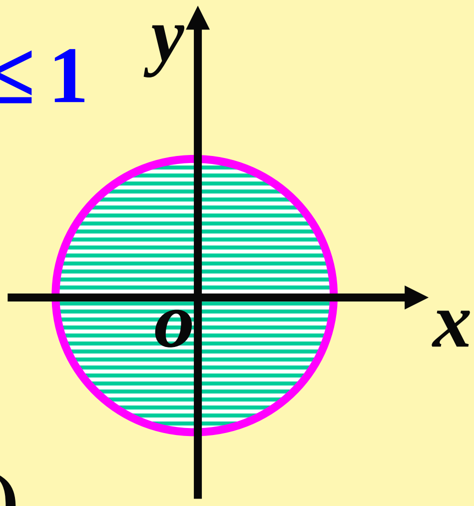
从图形易知在D上除切点外，处处有

$$x+y>1 \quad \Rightarrow (x+y)^2<(x+y)^3$$

所以有 $\iint\limits_{D_2}(x+y)^2 d\sigma \le \iint\limits_{D_2}(x+y)^3 d\sigma$。

例3 利用二重积分的性质，估计积分的值。

$$\iint_D (x^2+4y^2+1)d\sigma, \quad D: x^2+y^2 \le 1$$



解 先求$f(x,y)=x^2+4y^2+1$在D上的最大值、最小值。

因为 $f_x=2x$，$f_y=8y$，所以有驻点(0,0) 。

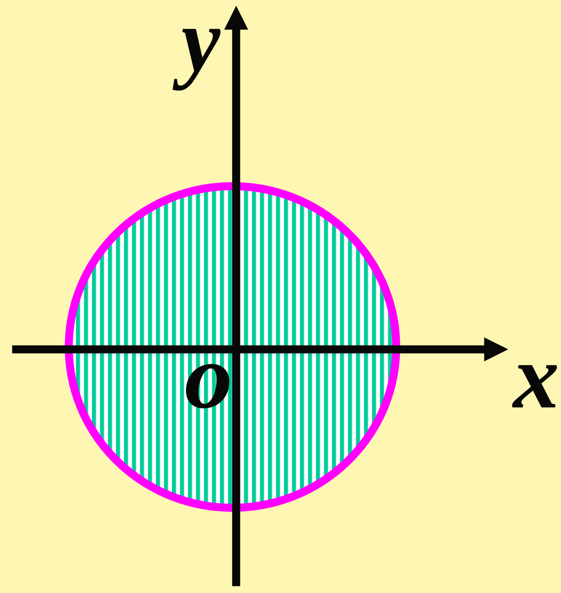
$f(0,0)=1$。

在D的边界上, $x=\cos\theta, y=\sin\theta(0\le\theta\le 2\pi)$,

$$f(x,y)=[x^2+4y^2+1]\Big|_{x^2+y^2=1}$$

$$=\cos^2\theta+4\sin^2\theta+1=2+3\sin^2\theta=\varphi(\theta)$$

$$f(x,y=2+3\sin^2\theta=\varphi(\theta)$$



显然，在边界上$f(x,y)$的最小值为2，最大值5。

于是$f(x,y)$在D上的最小值为1，最大值为5，积分区域的面积为π。所以有

$$\pi\le\iint_D(x^2+4y^2+1)d\sigma\le 5\pi \text{。}$$

内容小结

1、理解重积分概念与性质.

作业

同步练习册　　　习题 8—1

8.2.1 利用直角坐标计算二重积分

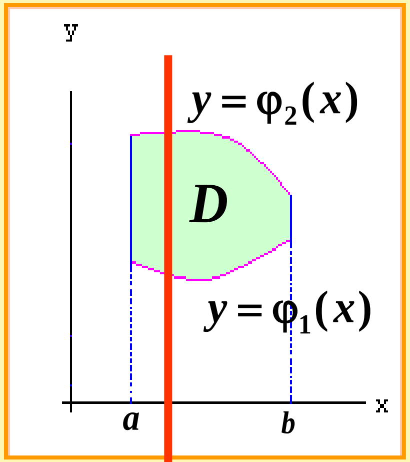
方法：化二重积分为二次单积分(两次定积分)

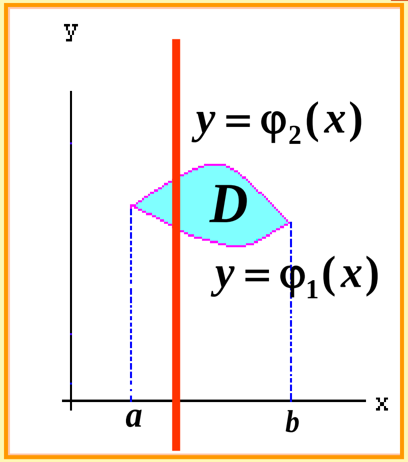
1. 用几何观点讨论二重积分的计算方法

（1）设$f(x, y)\geq 0$，$f(x, y)$在D上连续。

$$D: \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b$$

［X—型］

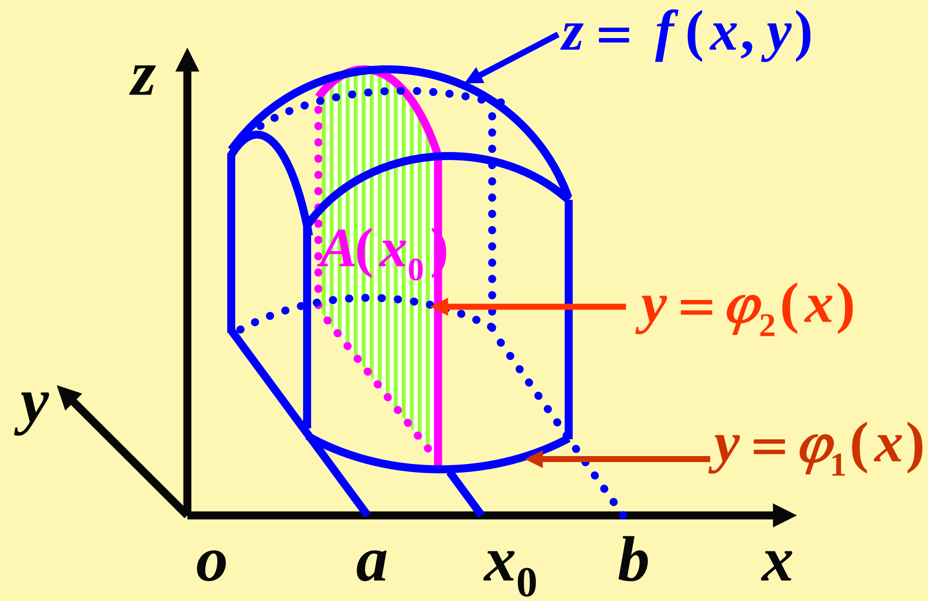




其中函数$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间$[a,b]$上连续.

先计算截面面积。

在区间$[a,b]$上任取一点x_0，作平行于yOz面的平面$x = x_0$。

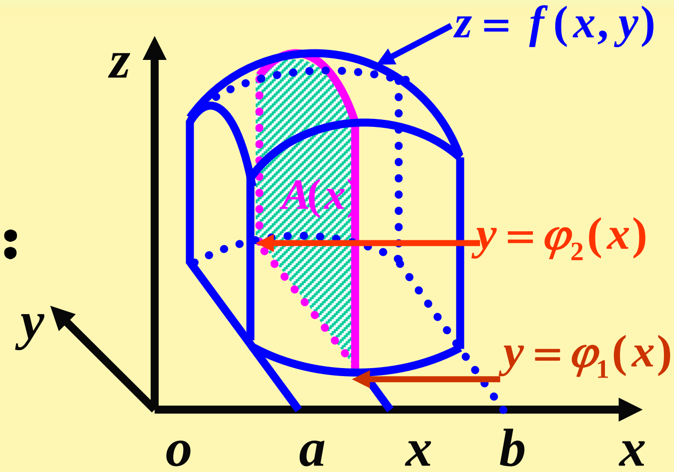


这平面截曲顶柱体所得截面是一个以区间$[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$为底、曲线$z = f(x_0, y)$为曲边的曲边梯形，其截面面积为：

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\,dy$$

一般地，过区间[a,b]上任一点x且平行于yOz面的平面截曲顶柱体所得截面面积为：

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy。$$



于是，应用计算平行截面面积为已知的立方体体积的方法，得曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

这个体积也就是所求二重积分的值，从而有等式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (1)$$

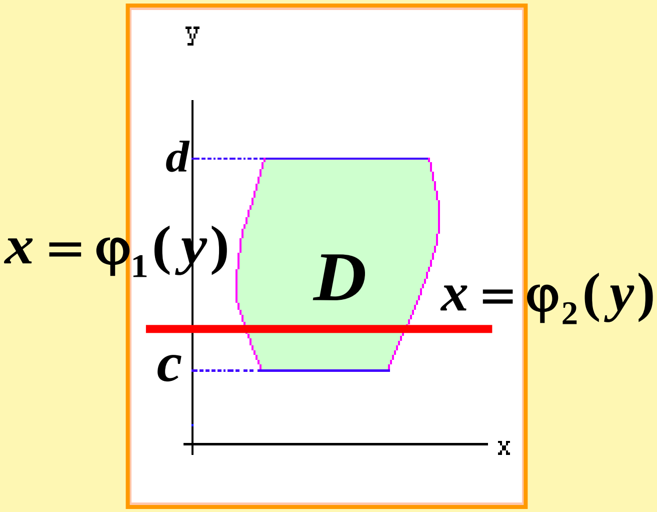
这个先对y、后对x的二次积分也常记作

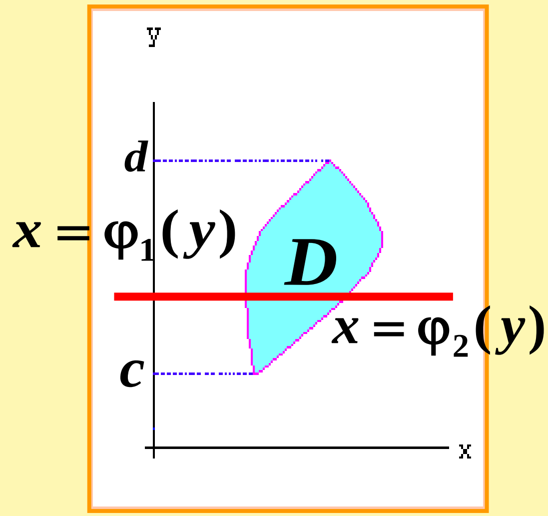
$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

即 $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \quad (1')$$ 。

(2)如果积分区域为:$c \le y \le d,\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$.

【Y—型】



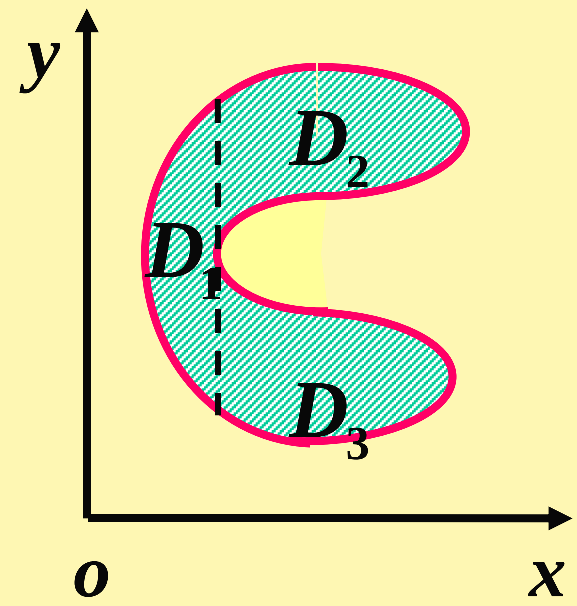


$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

X型区域的特点： 穿过区域且平行于y轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

Y型区域的特点： 穿过区域且平行于x轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

(3)若区域如图,则必须分割.



在分割后的三个区域上分别使用积分公式

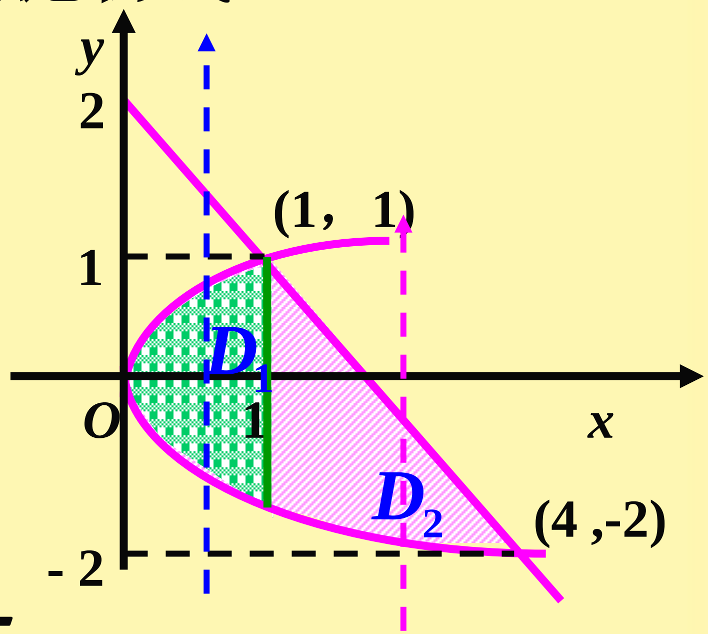
$$\iint_{D} = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} .$$

2、二重积分计算的一般方法

(1) 作图，确定D的类型。 (2) 选定积分顺序。

(3) 定出积分上下限。 (4) 计算定积分。

例1. 计算 $\iint_D xy\,d\sigma$，其中D 是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.



解　首先画出区域D的图形。

(1) 如先积y后积x，则有

$$\iint_D xy\,d\sigma = \iint_{D_1} xy\,d\sigma + \iint_{D_2} xy\,d\sigma$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} xy\,dy$$

$$= \int_0^1 0\,dx + \int_1^4 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{-\sqrt{x}}^{2-x} dx = \int_1^4 \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 4x)dx$$

$$= -\frac{45}{8}。$$

(2) 如先积x后积y，则有

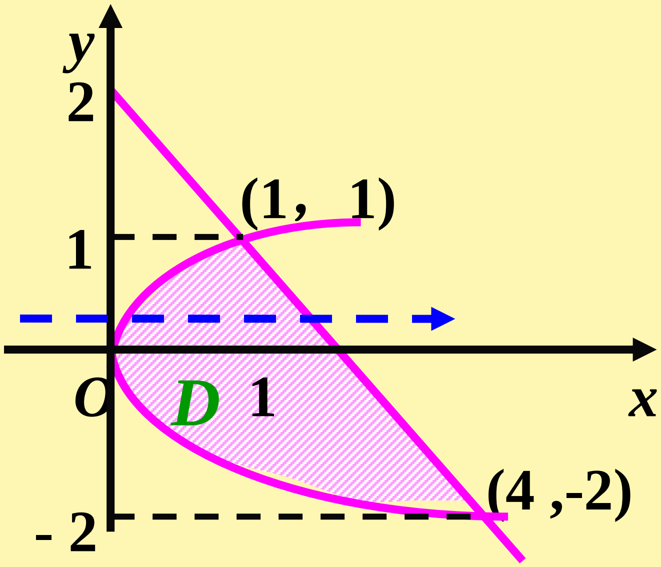
$$I=\int_{-2}^{1}dy\int_{y^2}^{2-y}xydx$$

$$=\int_{-2}^{1}\frac{y}{2}\left[(2-y)^2-y^4\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}[4y-4y^2+y^3-y^5]dy$$

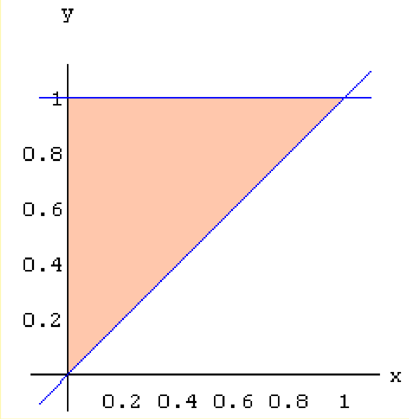
$$=\frac{1}{2}[2y^2-\frac{4}{3}y^3+\frac{y^4}{4}-\frac{y^6}{6}]_{-2}^{1}$$

$$=-\frac{45}{8}。$$



NJUPT

例 2 求$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以(0,0),(1,1),(0,1)为顶点的三角形.



解 $\because \int e^{-y^2}dy$无法用初等函数表示

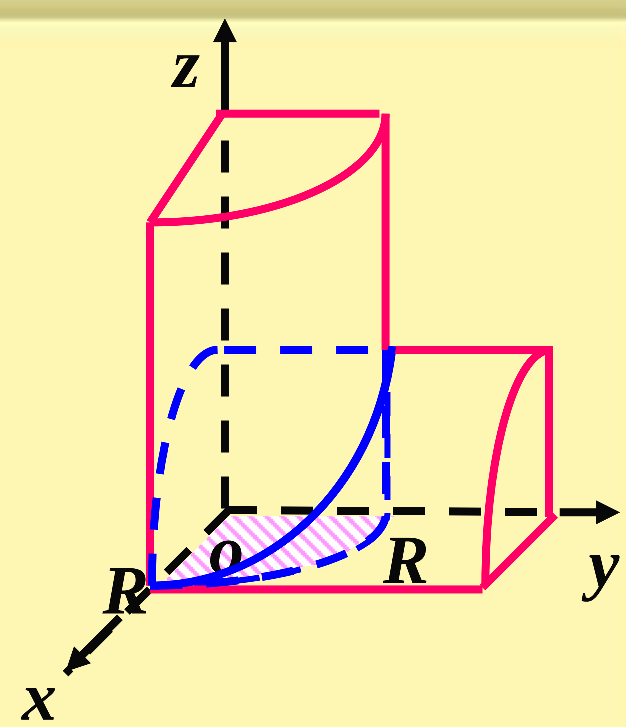
$\therefore$ 积分时必须考虑次序

$$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y x^2 e^{-y^2}dx$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}dy = \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}dy^2 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

注 在化二重积分为二次积分时，既要考虑区域D的形状，又要考虑函数$f(x,y)$的特性来选择恰当的积分的次序.

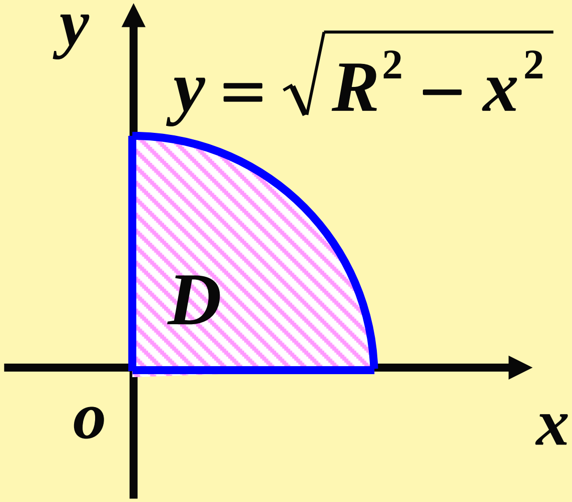
例3 求两个底圆半径都等于R的直交圆柱面所围成的立体体积。



解 设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2+y^2=R^2 \text{及} x^2+z^2=R^2$$

利用立体关于坐标平面的对称性，只要算出它在第一卦限部分(如图 (*a*))的体积V_1，然后再乘以8就行了。



所求立体在第一卦限部分可以看成是一个曲顶柱体，它的底为

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R\},$$

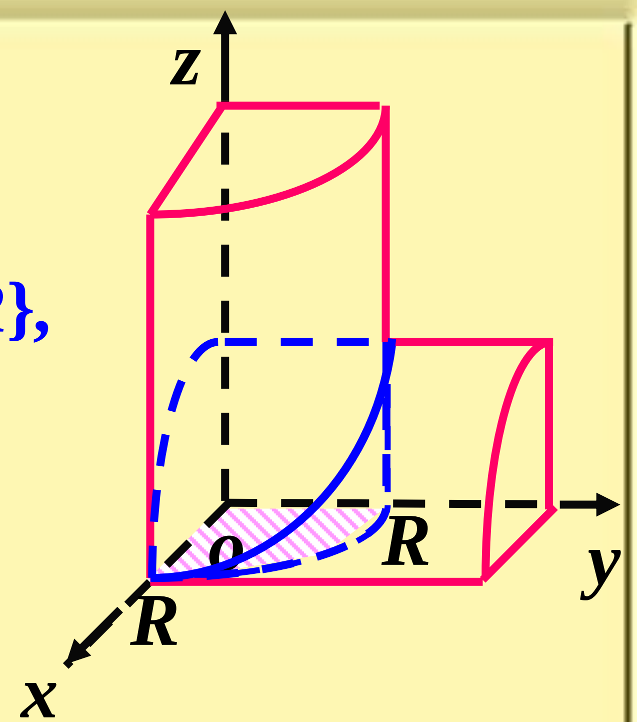
它的顶是柱面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$,

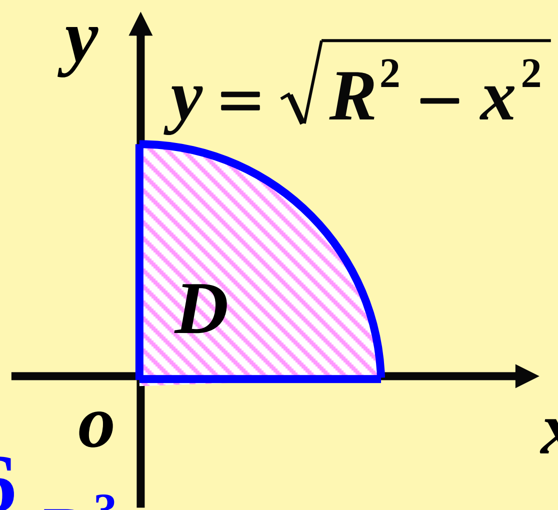
于是 $V_1=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma$。

$$=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^R\left[\sqrt{R^2-x^2}\,y\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx$$

$$=\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{2}{3}R^3$$





从而所求立体体积为 $V=8V_1=\dfrac{16}{3}R^3$。

3、交换积分顺序

①由所给的积分顺序及积分限写出D的不等式表示并画出积分区域的草图

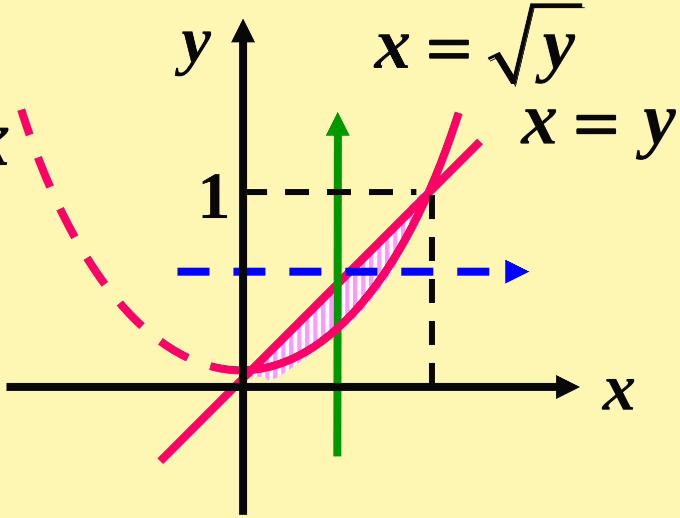
②由积分区域按新的积分顺序确定积分限。

例4 交换以下积分的积分顺序

$$(1)\ I_1=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

解 (1) $I_1=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

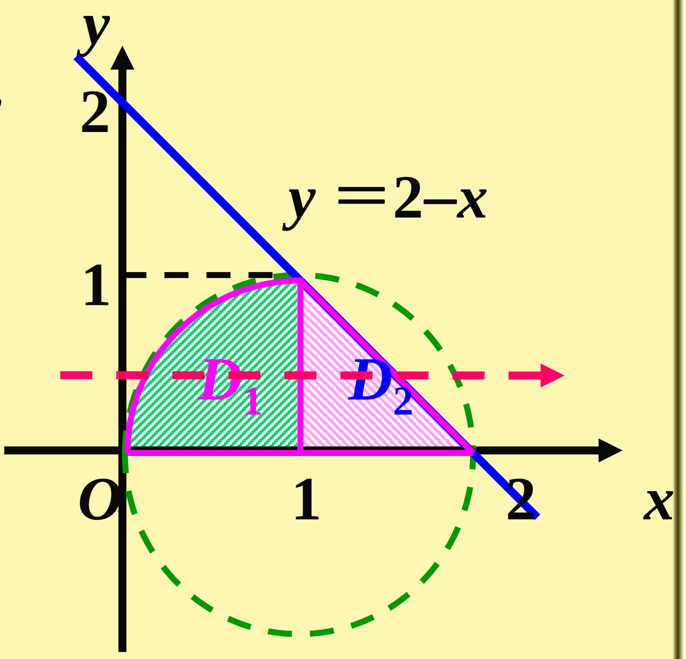
$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$$



$$(2)\quad I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

解 $D_1:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\\ 0\le x\le 1,\end{cases}$ $D_2:\begin{cases}0\le y\le 2-x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$

$$\Rightarrow D:\begin{cases}1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 2-y\\ 0\le y\le 1\end{cases}$$

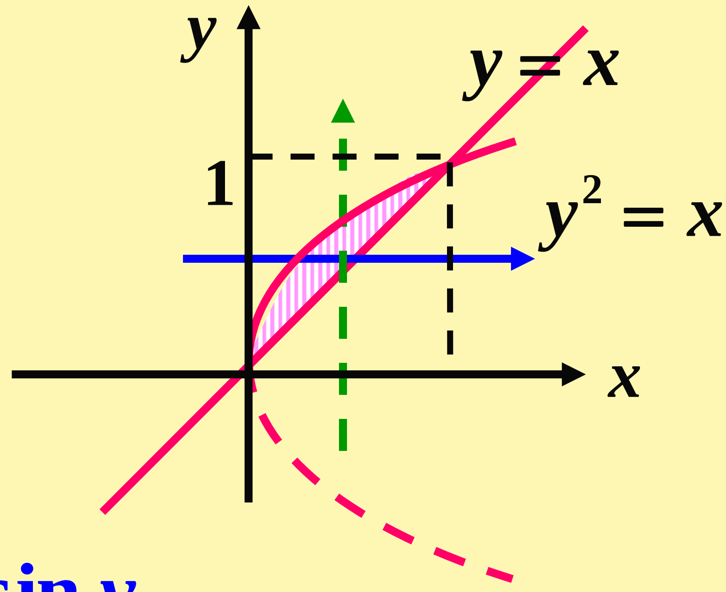


$$I=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$$

例5 计算$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$

解 积分区域如图所示。

应先积x，后积y



$$I = \iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2) dy = \int_0^1 \sin y dy - \int_0^1 y \sin y dy$$

$$= 1 - \cos 1 + y\cos y\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy = 1 - \sin 1。$$

4 有关二重积分的对称性的应用

(1). 若D关于y轴对称，即当$(x, y)\in D$时，必有$(-x, y)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & 当f(-x,y)=-f(x,y)时\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & 当f(-x,y)=f(x,y)时\end{cases}$$

其中D_1是D的右半区域

(2). 若D关于x轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & 若f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & 若f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_1是D的上半部分区域

3、若D关于直线 $y=x$对称，

即当$(x,y)\in D$时，必有$(y,x)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D [f(x,y)+f(y,x)]d\sigma$$

例6　计算$I=\iint\limits_D [3x-6y+9]dxdy$

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$$

解：　利用对称性

D关于x轴，y轴对称，于是有

$$\iint\limits_D xdxdy=0 \qquad \iint\limits_D ydxdy=0$$

$$I=3\iint\limits_D xdxdy-6\iint\limits_D ydxdy+9\iint\limits_D dxdy$$

$$=9\pi R^2$$

内容小结

1、 会把二重积分化成直角坐标下的二次积分,会交换积分次序。

作业

同步练习册　　习题 8.2.1