8.2　二重积分的计算法

8.2.1 利用直角坐标计算二重积分

当积分区域是X型区域时

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

当积分区域是Y型区域时

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

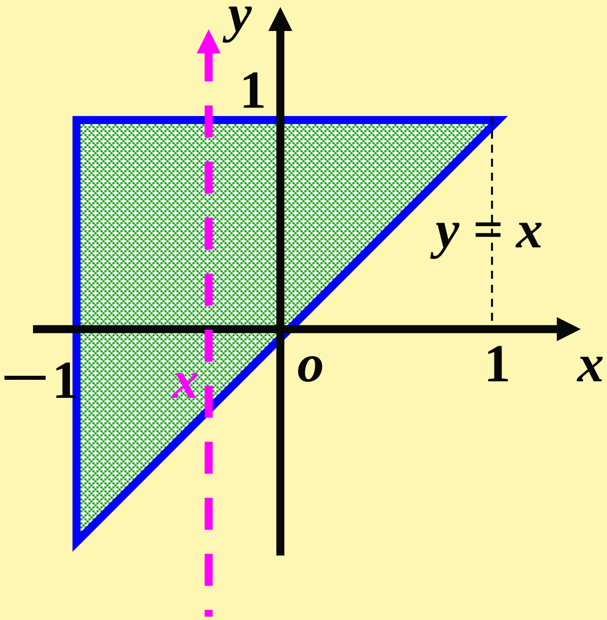
其它：分割成若干个X—型或Y—型区域。

2、二重积分计算

例1 计算$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma$，

其中D是直线$y=x, x=-1$和

$y=1$所围成的闭区域。



解 画出积分区域D如图所示。

既是X—型，又是Y—型的。

先对y,再对x求积分

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma=\int_{-1}^{1}\left[\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,dy\right]dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left[(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_x^1 dx=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(|x|^3-1)dx$$

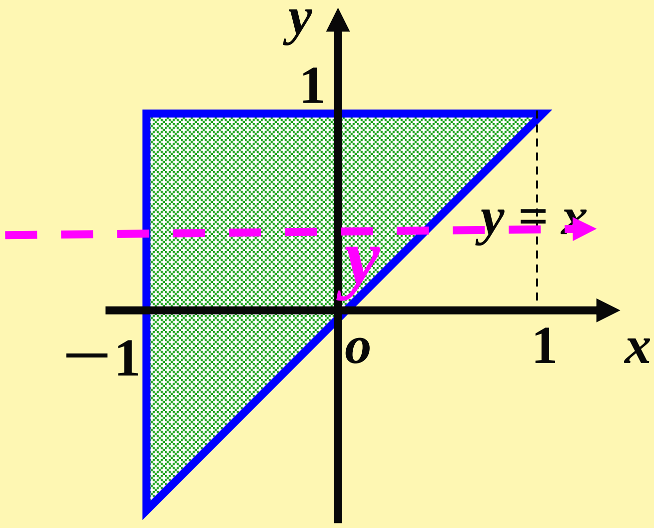
$$=-\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)dx=\frac{1}{2}\text{。}$$

若先对x再对y求积分,则

$$\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma$$

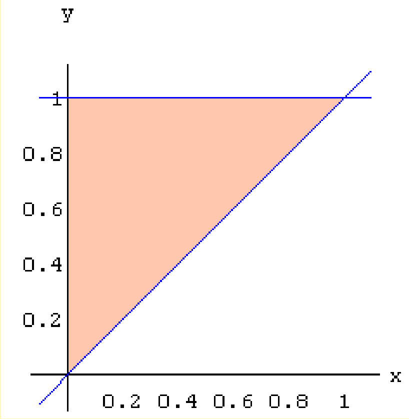
$$=\int_{-1}^{1} y\left[\int_{-1}^{y}\sqrt{1+x^2-y^2}\,dx\right]dy$$

$=\cdots$。



例 2 求$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy$，其中 D 是以(0,0),(1,1),(0,1)为顶点的三角形.

解 $\because \int e^{-y^2} dy$无法用初等函数表示



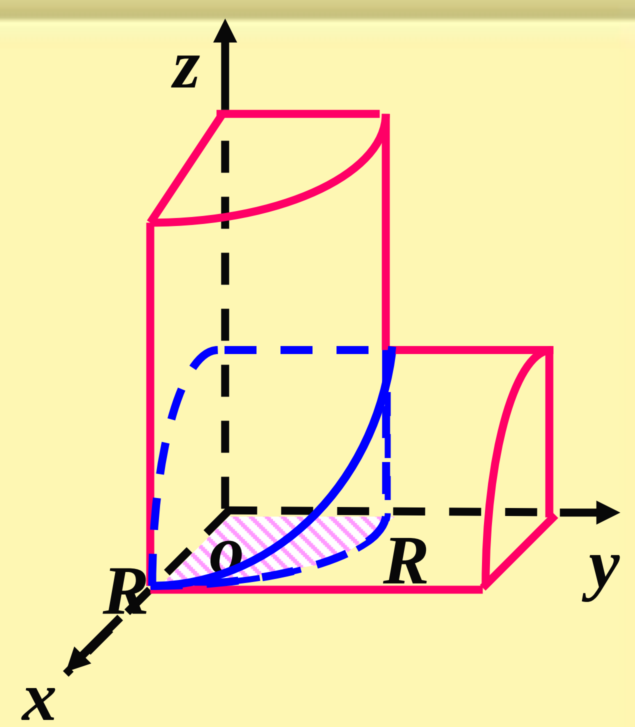
$\therefore$ 积分时必须考虑次序

$$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^3}{3} dy = \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^2}{6} dy^2 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

注 在化二重积分为二次积分时，既要考虑区域D的形状，又要考虑函数$f(x,y)$的特性来选择恰当的积分的次序.

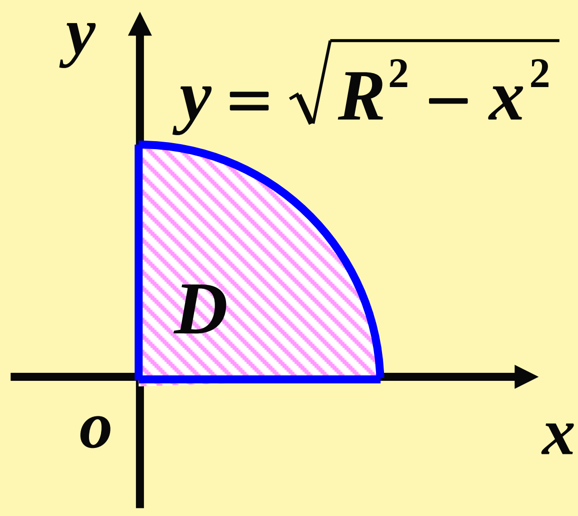
例3 求两个底圆半径都等于R的直交圆柱面所围成的立体体积。



解 设这两个圆柱面的方程分别为

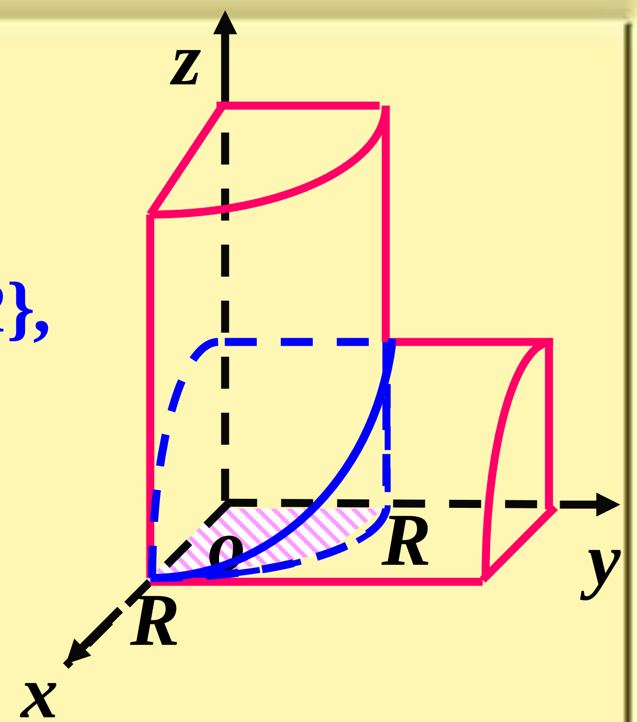
$$x^2+y^2=R^2 \text{及} x^2+z^2=R^2$$

利用立体关于坐标平面的对称性，只要算出它在第一卦限部分(如图 (a))的体积V_1，然后再乘以8就行了。



所求立体在第一卦限部分可以看成是一个曲顶柱体，它的底为

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R\},$$



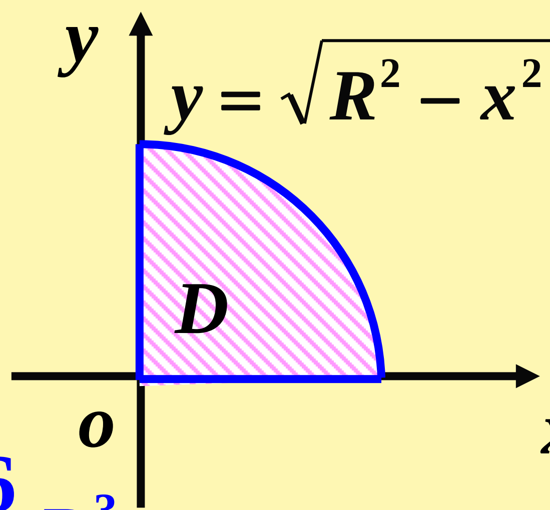
它的顶是柱面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$,

于是 $V_1=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}d\sigma$。

$$=\int_0^R[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy]dx$$

$$=\int_0^R[\sqrt{R^2-x^2}y]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx$$

$$=\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{2}{3}R^3$$



从而所求立体体积为 $V=8V_1=\dfrac{16}{3}R^3$。

3、交换积分顺序

①由所给的积分顺序及积分限写出D的不等式表示并画出积分区域的草图

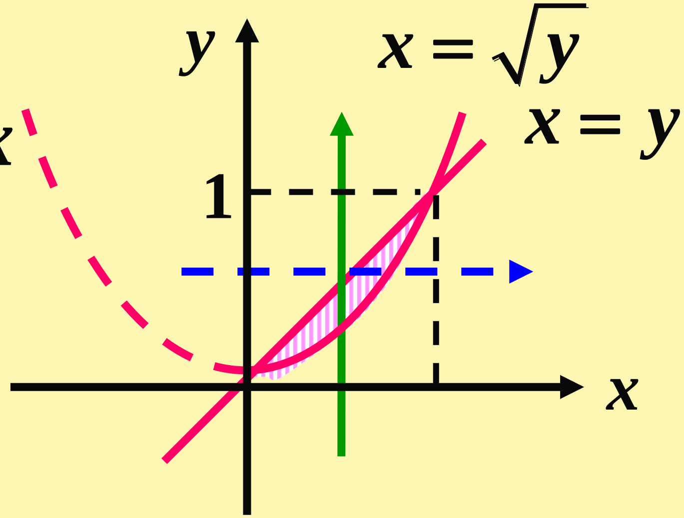
②由积分区域按新的积分顺序确定积分限。

例4 交换以下积分的积分顺序

$$(1)\ I_1=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

解 (1) $I_1=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

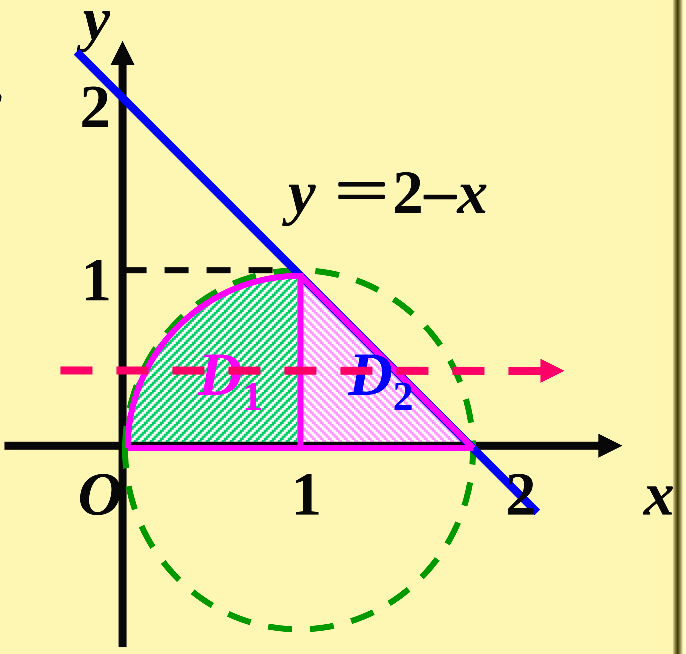
$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$$



(2) $I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$

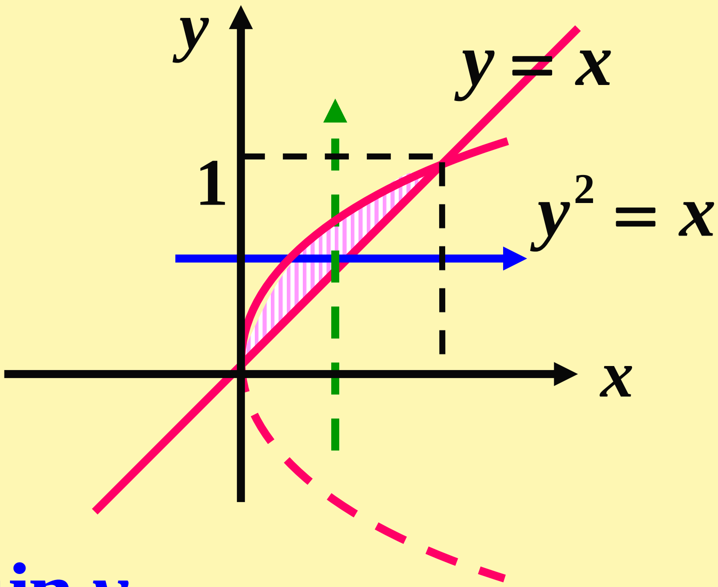
解 $D_1:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\\ 0\le x\le 1,\end{cases}$ $D_2:\begin{cases}0\le y\le 2-x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$

$$\Rightarrow D:\begin{cases}1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 2-y\\ 0\le y\le 1\end{cases}$$



$$I=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$$

例5 计算$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy$



解 积分区域如图所示。

应先积x，后积y

$$I=\iint_D \frac{\sin y}{y}d\sigma = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$$

$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy = \int_0^1 \sin y dy - \int_0^1 y\sin y dy$$

$$=1-\cos 1 + y\cos y\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy = 1-\sin 1。$$

4 有关二重积分的对称性的应用

(1). 若D关于y轴对称，即当$(x, y)\in D$时，必有$(-x, y)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & 当f(-x,y)=-f(x,y)时\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & 当f(-x,y)=f(x,y)时\end{cases}$$

其中D_1是D的右半区域

(2). 若D关于x轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & 若f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & 若f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_1是D的上半部分区域

3、若D关于直线 $y=x$对称，

即当$(x,y)\in D$时，必有$(y,x)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(y,x)d\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D [f(x,y)+f(y,x)]d\sigma$$

例6　计算 $I=\iint\limits_{D}[3x-6y+9]dxdy$

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$$

解：　利用对称性

D关于x轴，y轴对称，于是有

$$\iint\limits_{D} xdxdy=0 \qquad \iint\limits_{D} ydxdy=0$$

$$I=3\iint\limits_{D} xdxdy-6\iint\limits_{D} ydxdy+9\iint\limits_{D} dxdy$$

$$=9\pi R^2$$

内容小结

1、 会把二重积分化成直角坐标下的二次积分,会交换积分次序。

作业

同步练习册　　习题 8.2.1

8.2.2、利用极坐标计算二重积分

有些二重积分，积分区域D的边界用极坐标方程来表示比较方便，且被积函数用极坐标变量ρ(或r)、θ表达比较简单。这时，我们就可以利用极坐标计算二重积分。

按二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

下面我们来研究这个和的极限在极坐标系中的形式。

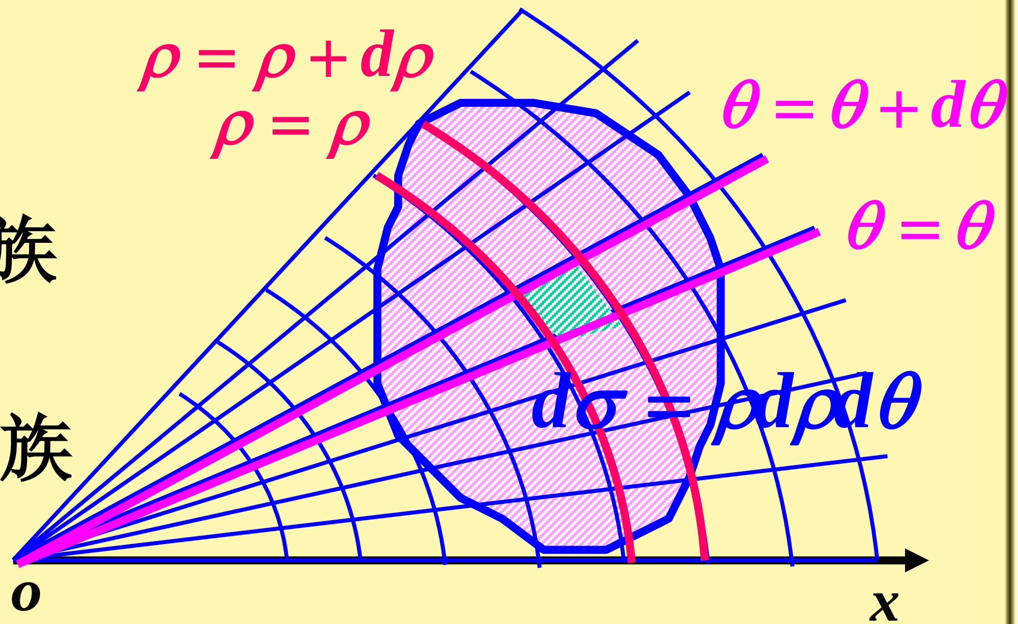
1、极坐标系下的二重积分的形式

假定从极点O出发且穿过闭区域D内部的射线与D的边界曲线相交不多于两点。

我们用下面方法分割

(1)以极点为中心的一族同心圆：ρ=常数，

(2)从极点出发的一族射线：θ=常数，



公式中的$\rho d\rho d\theta$称为极坐标下的面积元素，

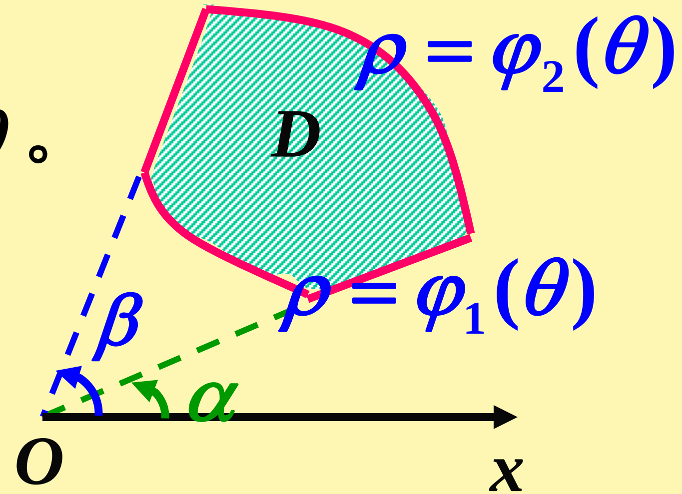
记为$d\sigma=\rho d\rho d\theta$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

2、如何化为两次单积分

积分顺序：一般是先积ρ后积θ。

定限的方法：依D的特点。

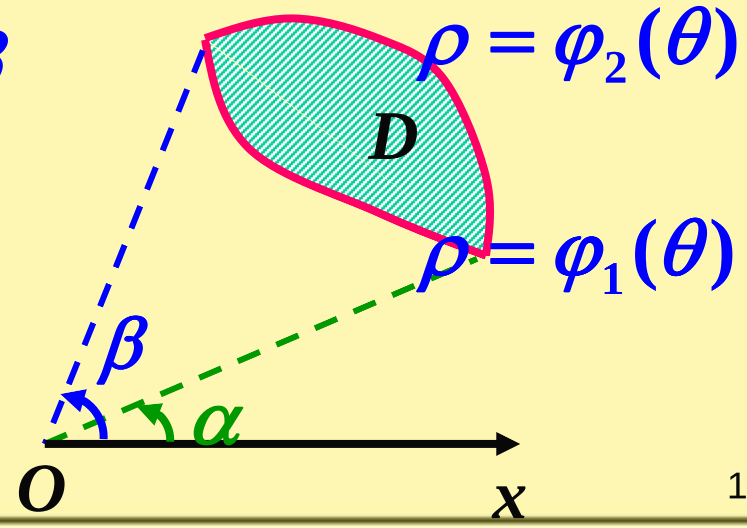


(1) 极点在D外

设积分区域D可用不等式

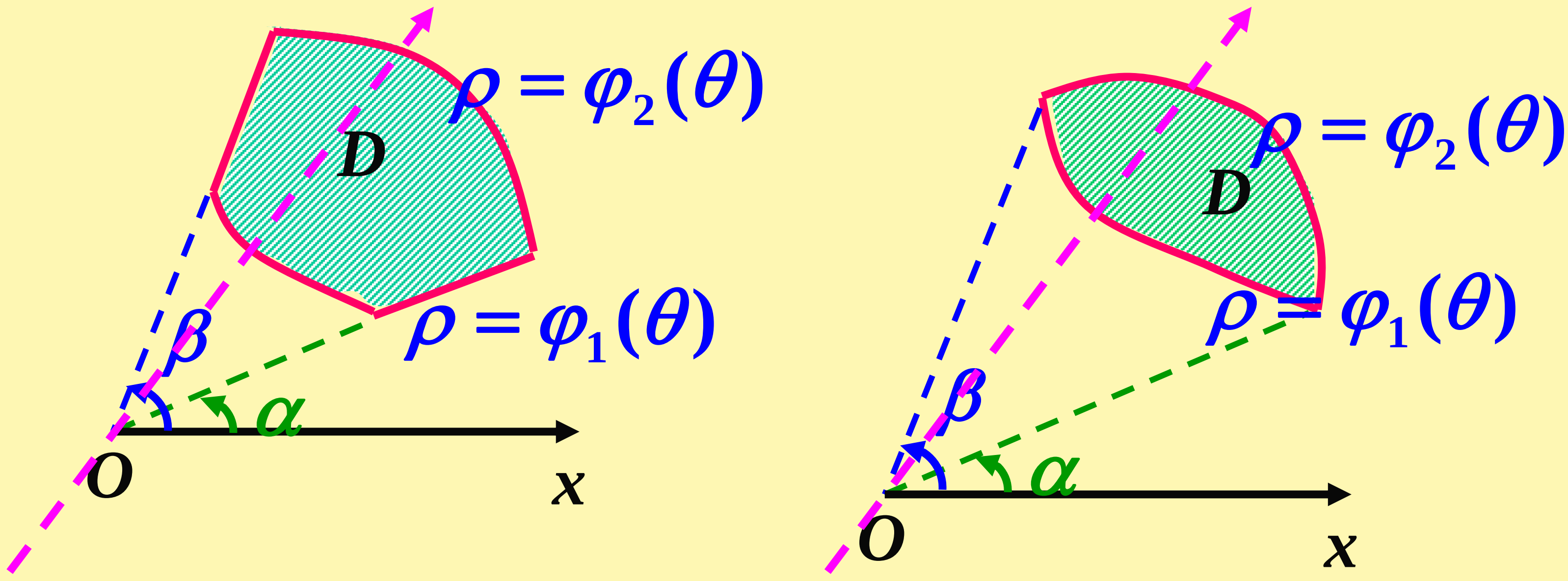
$$\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$$

来表示(如图)



其中函数$\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta)$

在区间$[\alpha,\beta]$上连续。

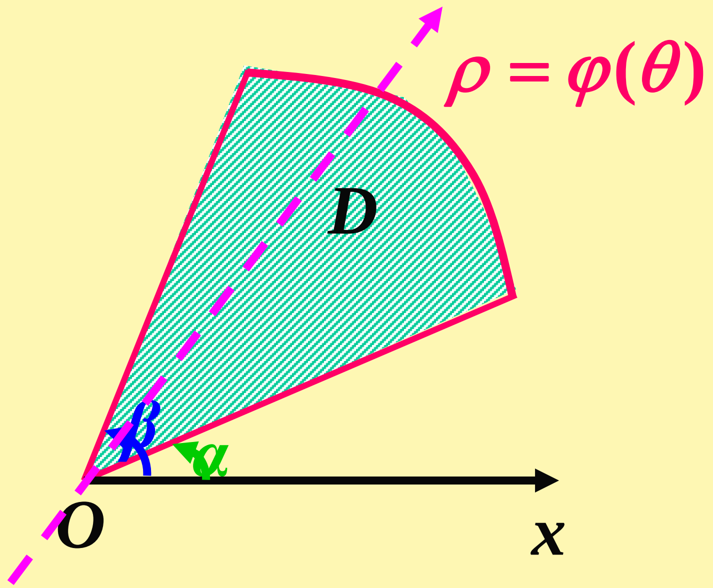


$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

(2) 极点在D的边界上时

闭区域D用不等式表示



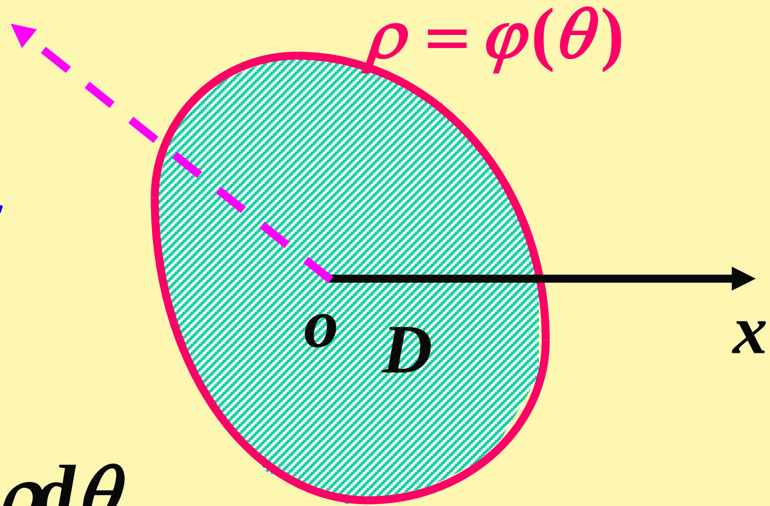
$$0\le\rho\le\varphi(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho。$$

(3) 极点在D的内部时

闭区域D用不等式表示



$D: 0\le\rho\le\varphi(\theta), 0\le\theta\le 2\pi$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

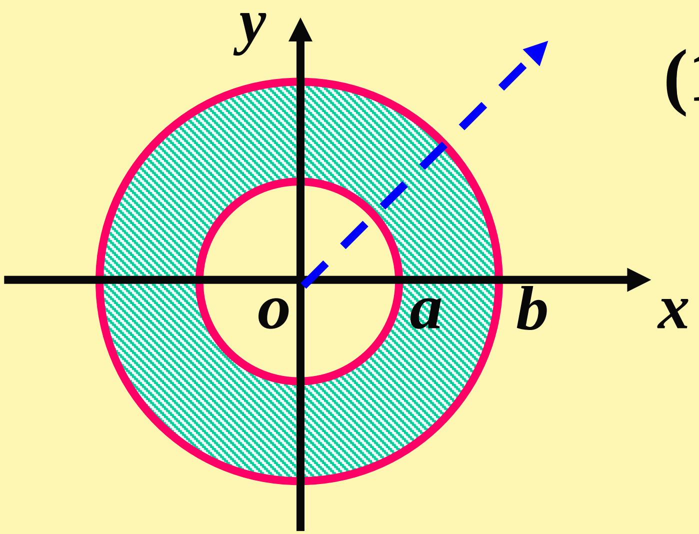
$$=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho。$$

由二重积分的性质，闭区域D的面积σ可以表示为

$$\sigma=\iint_D d\sigma=\iint_D \rho d\rho d\theta$$

例 1 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化为极坐标系下的二次积分,其积分区域 D 如下图所示。

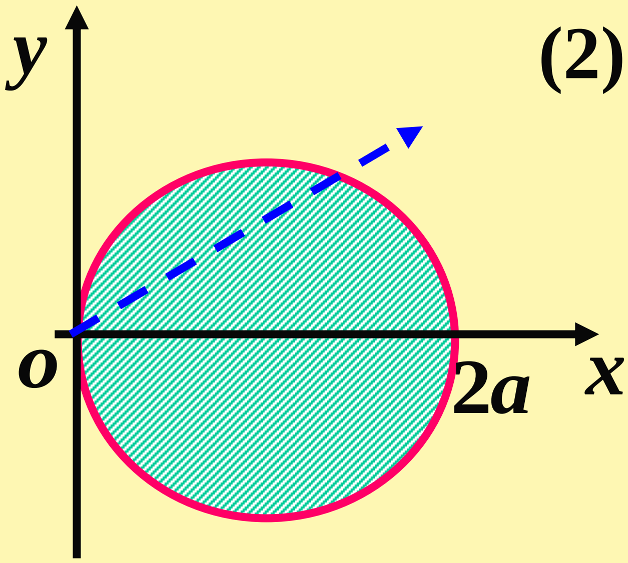


(1) 闭区域 D 用不等式表示

$$D: a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$$

$$D: a \le \rho \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$



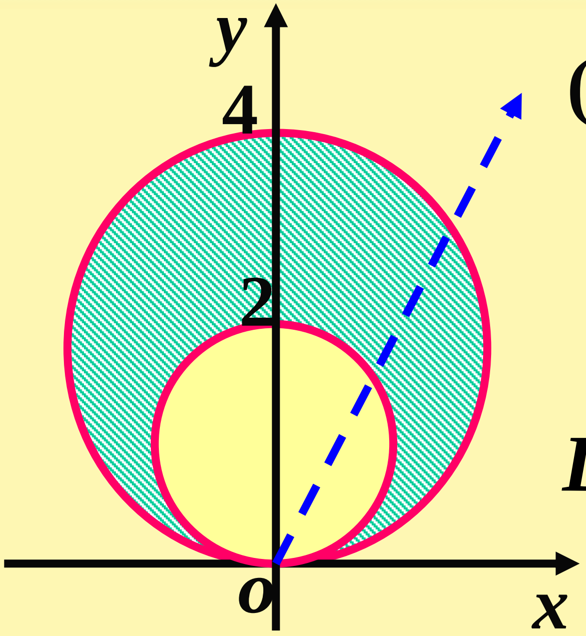
(2) 闭区域D用不等式表示

$$D: x^2 + y^2 \le 2ax$$

$$D: \begin{cases} 0 \le \rho \le 2a\cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$



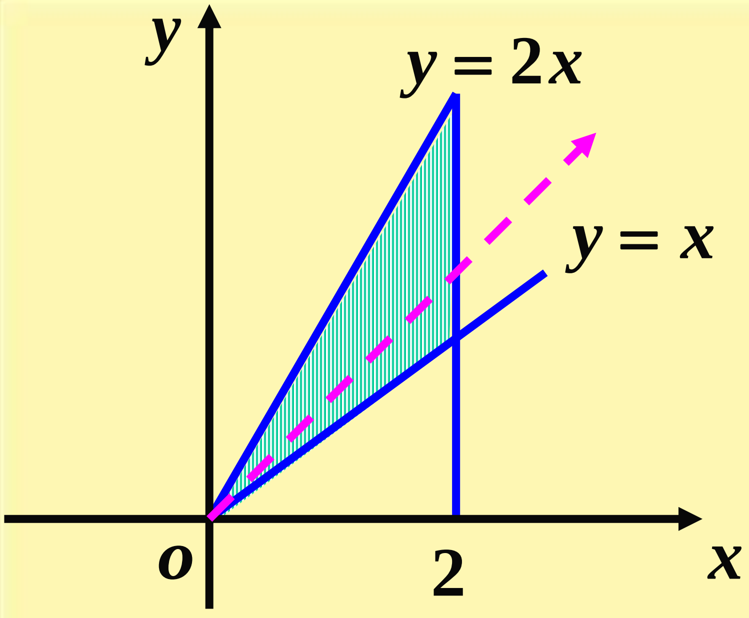
(3) 闭区域D用不等式表示

$$D: \quad 2y \le x^2 + y^2 \le 4y$$

$$D: \quad 2\sin\theta \le \rho \le 4\sin\theta, 0 \le \theta \le \pi$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$



(4) 闭区域D用不等式表示

$$D:\quad x \le y \le 2x,\ 0 \le x \le 2$$

$$D:\quad 0 \le \rho \le \frac{2}{\cos\theta},$$

$$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \arctan 2$$

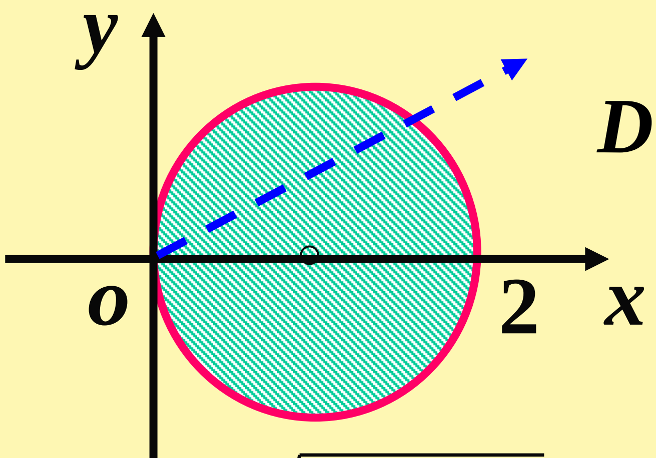
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

例 2 将下列积分化为极坐标形式,并计算积分值。

(1) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$,其中$D: x^2+y^2 \le 2x$ 。

解 积分区域$D: x^2+y^2 \le 2x$



$$D:\quad 0 \le \rho \le 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\cdot\rho d\rho$$

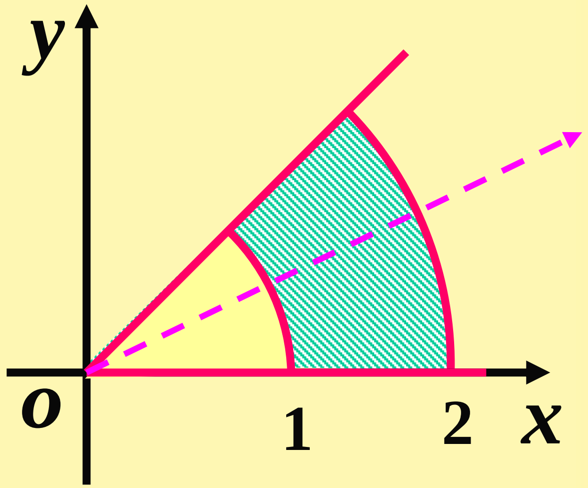
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta \ = \frac{8}{3}\cdot 2\cdot I_3 = \frac{8}{3}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{32}{9}。$$

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\arctan\dfrac{y}{x}\,dxdy$，积分区域$D$的图形为：

$D: 1 \le x^2+y^2 \le 4$，$y=x$，

$y=0$所围成的位于第 I

象限的部分。

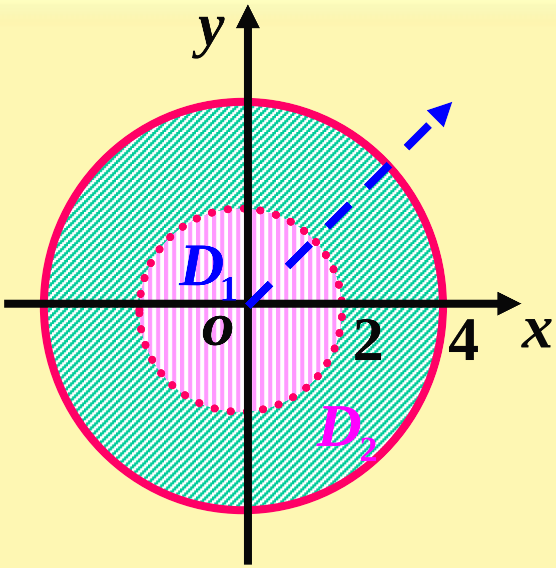


解　$D: 1 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \iint\limits_D (x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x}\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \rho^2\cdot\theta\cdot\rho d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho^3 d\rho \quad = \frac{15}{128}\pi^2。$$

(3) $\iint\limits_{D} \left|4 - x^2 - y^2\right| dxdy,$



$D: x^2 + y^2 \le 16 \ = D_1 \cup D_2$

$D_1: x^2 + y^2 \le 4,$

$D_2: 4 \le x^2 + y^2 \le 16$。

$D_1: 0 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi \quad D_2: 2 \le \rho \le 4, 0 \le \theta \le 2\pi$

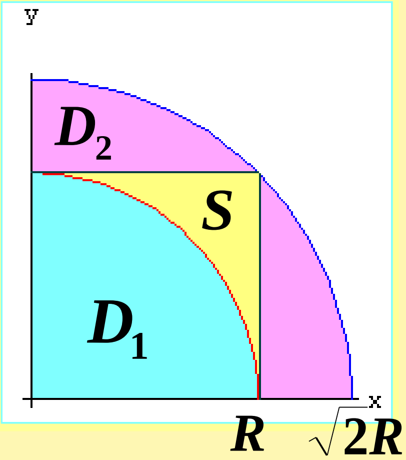
$$\therefore \iint\limits_{D} \left|4 - x^2 - y^2\right| dxdy = \iint\limits_{D_1 \cup D_2} \left|4 - x^2 - y^2\right| dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - \rho^2) \cdot \rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 (\rho^2 - 4) \cdot \rho d\rho$$

$$= 8\pi + 72\pi \ = 80\pi$$

例 3 求广义积分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

解 $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{R} e^{-x^2} dx$$



$$\left(\int_0^{R} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^{R} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{R} e^{-x^2} dx$$

$$= \int_0^{R} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{R} e^{-y^2} dy = \iint_S e^{-x^2-y^2} dxdy$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 \le x \le R, 0 \le y \le R\}$$

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2R^2\}$$

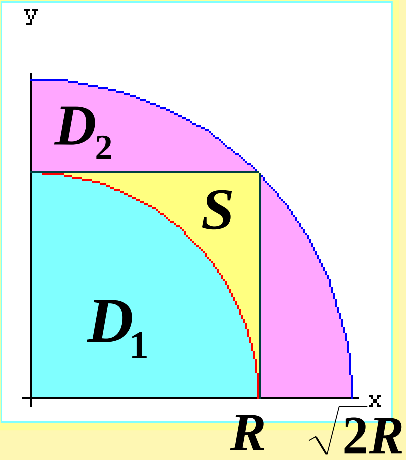
$\{x \geq 0, y \geq 0\}$ 显然有 $D_1 \subset S \subset D_2$

$$\because \quad e^{-x^2-y^2} > 0,$$

$$\therefore \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{S} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2});$$



同理 $I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2});$

$\because I_1 < I < I_2,$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2});$$

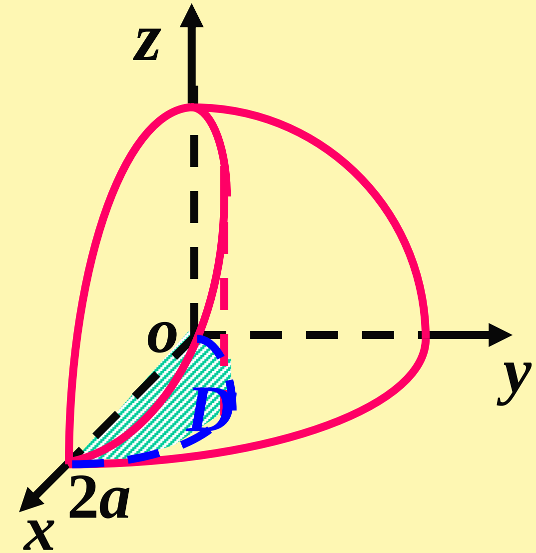
当$R\to\infty$时，$I_1 \to \dfrac{\pi}{4}$，$I_2 \to \dfrac{\pi}{4}$，

故当$R\to\infty$时，$I \to \dfrac{\pi}{4}$，即$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$，

所求广义积分$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

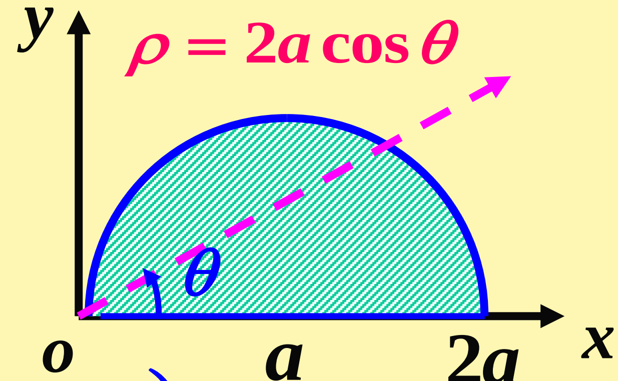
例4 求球体 $x^2+y^2+z^2=4a^2$被圆柱$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积。

解 由对称性知



$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy,$$

$$D: 0\le\rho\le 2a\cos\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$



$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy,$$

$$=4\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta,$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho d\rho$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)。$$

内容小结

1、会把二重积分化成极坐标下的二次积分.

2、 会适当选取坐标系来计算二重积分。

注：极坐标系的选取方法：

1：如果积分区域D为圆形域，扇型域等

或边界曲线含有: $(1)x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \rho=a$

$$(2)x^2+y^2=2ax \Rightarrow \rho=2a\cos\theta$$

$$(3)x^2+y^2=2ay \Rightarrow \rho=2a\sin\theta$$

2：被积函数用极坐标表示比较简单，如

$$f(x,y)=\varphi(x^2+y^2)=\varphi(\rho^2)\ \psi(\arctan\frac{y}{x})=\psi(\theta)$$

作业

同步练习册　　习题 8. 2. 2