二重积分习题课

一、内容与要求

1　理解二重积分的定义与性质.

2　会把二重积分化成直角坐标、极坐标下的二次积分；会交换积分次序；两种坐标系下的二次积分会互相转换.

3　会适当选取坐标系来计算二重积分.

4　有关二重积分的对称性的应用

5、有关二重积分的一些综合题

典型例题

一、 利用二重积分的定义与性质。

不等式性质、估值定理、积分中值定理等

例1　设$f(x, y)$连续，D是由$y=0$，$y=x^2$，$x=1$所围成的区域，且有$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$　(1)

求$f(x, y)$

解：设$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=I$　则　$f(x,y)=xy+I$

上式两端在D上进行二重积分，得

$$I=\iint\limits_D (xy+I)dxdy=\iint\limits_D xydxdy+I\iint\limits_D dxdy$$

$$\iint\limits_D dxdy=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} xydy=\frac{1}{12}$$

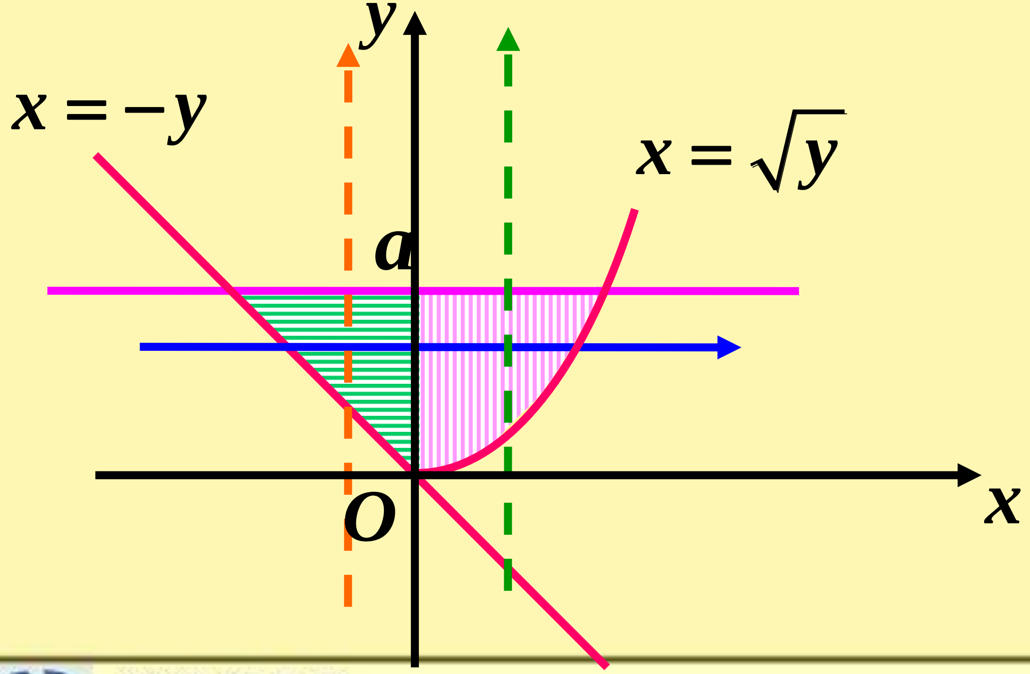
求得　$I=\frac{1}{8}$，　从而　$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$

二、把二重积分化成直角坐标，极坐标下的二次积分,交换积分次序,坐标系互相转换

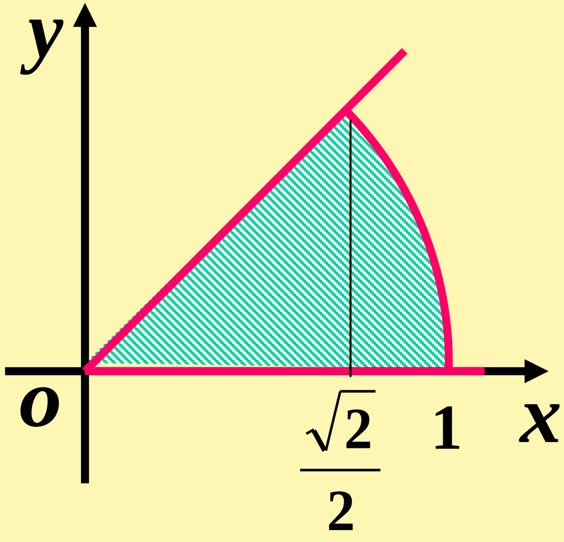
例2 （1）交换积分顺序

$$(1)\ I=\int_0^a dy\int_{-y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

$$=\int_{-a}^{0}dx\int_{-x}^{a} f(x,y)dy+\int_0^{\sqrt{a}}dx\int_{x^2}^{a} f(x,y)dy$$



(2).将$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$化为直角坐标下的二次积分



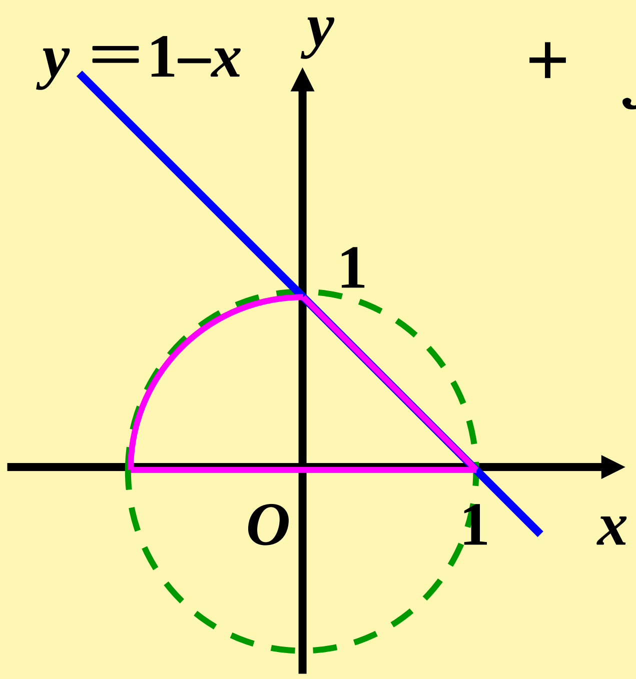
解:

$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{x} f(x,y)dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

⑶ 将 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$化为极坐标下的二次积分.

解: 原式 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$

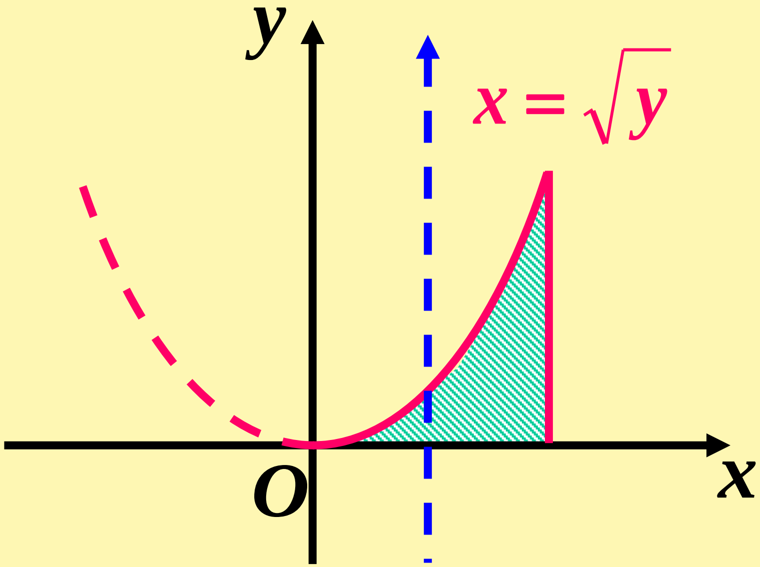


$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$

三、选择适当的坐标系、积分次序计算下列二重积分

例3 (1) $\iint\limits_D \sin x^3 dxdy, D: x=\sqrt{y}, x=1, y=0$所围。

解 应先积y



$$I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sin x^3 dy$$

$$=\int_0^1 x^2\sin x^3 dx$$

$$=-\frac{1}{3}\cos x^3\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(1-\cos 1)。$$

(2) $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy \quad D: x^2 + y^2 \le Rx$

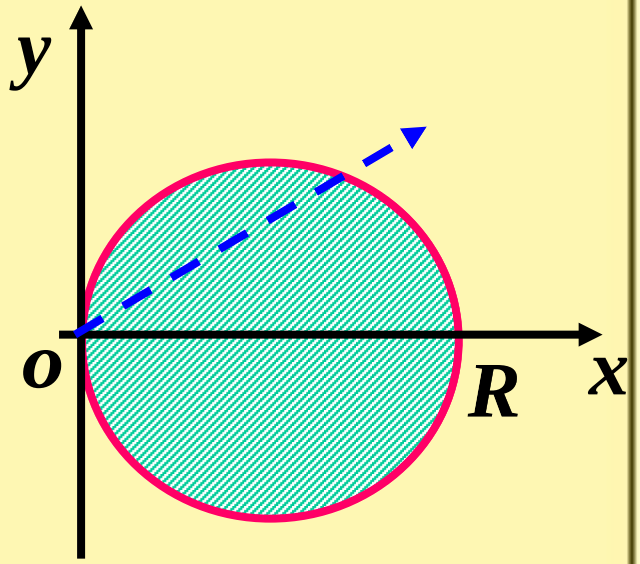
解 $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3(1 - |\sin\theta|^3)d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3(1 - \sin^3\theta)d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3}R^3 - \frac{4}{9}R^3$$

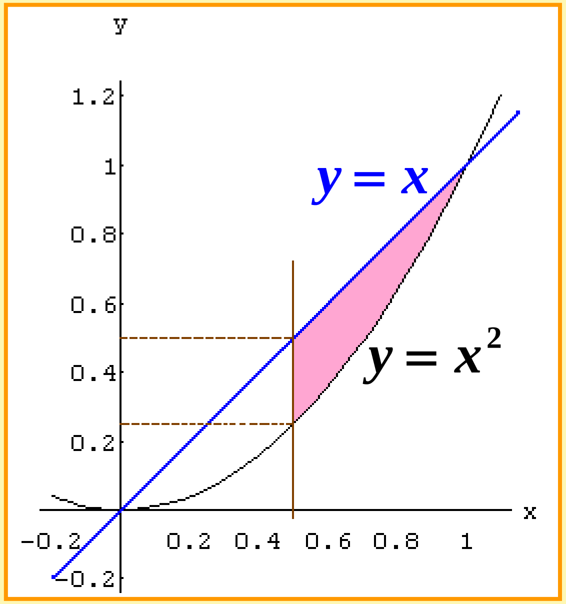


或 $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$

(3) 计算积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx.$

解 $\because \int e^{\frac{y}{x}}dx$不能用初等函数表示

$\therefore$先改变积分次序.



原式$=I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(e-e^{x})dx=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}.$$

(4)计算 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}e^{-y^2}dy\int_0^{y}e^{-x^2}dx+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}e^{-x^2}dx$

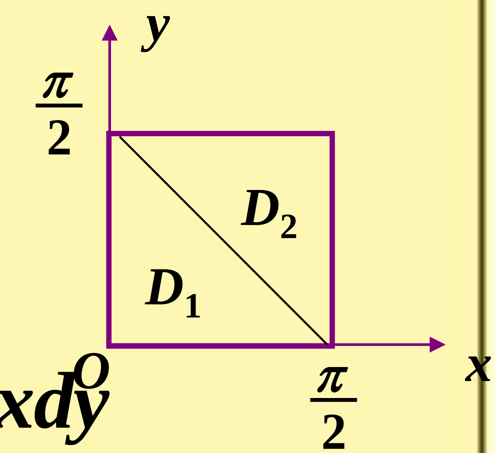
解：原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{8}(1-e^{-R^2})$

四、有关特殊形式函数的二重积分的计算

方法：分区域；利用对称性

例4 计算下列二重积分

$$(1)\iint\limits_{D}\left|\cos(x+y)\right|dxdy,\quad D:0\le x,y\le\frac{\pi}{2}$$



解　直线$x+y=\dfrac{\pi}{2}$将D分成两部分

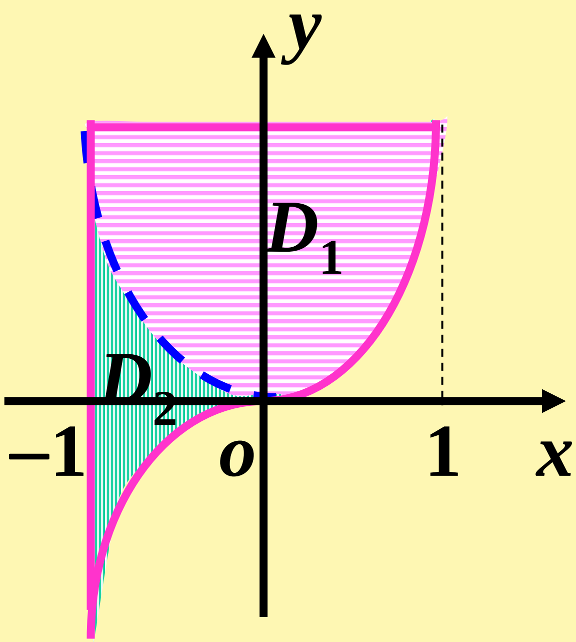
$$I=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)dxdy-\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)dxdy$$

$$=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2-x}\cos(x+y)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\pi/2-x}^{\pi/2}\cos(x+y)dy$$

$$=\pi-2$$

例5 (1)计算$I=\iint_D x[1+\sin yf(x^2+y^2)]dxdy$

其中D是由$y=x^3$，$y=1$，$x=-1$，所围区域，f为连续函数。



解 利用对称性。

作曲线$y=-x^3$，将区域D分成两部分D_1和D_2

D_1关于y轴对称

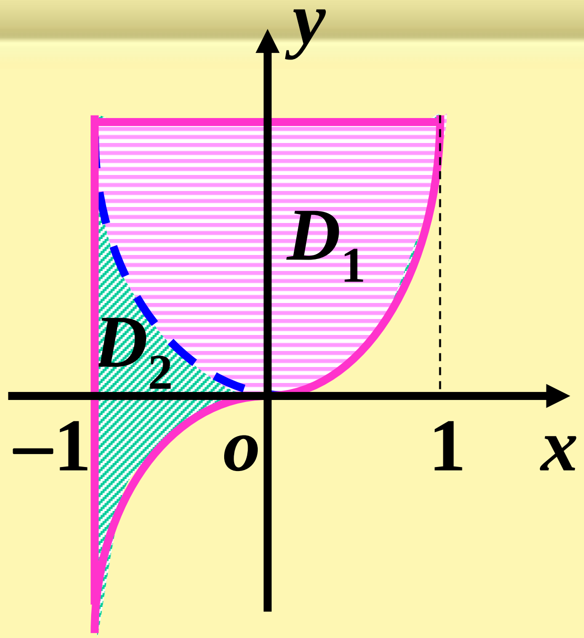
D_2关于x轴对称

因为连续函数$x\sin yf(x^2+y^2)$关于变量x、y分别都是奇函数，x关于变量x是奇函数，所以有

$$\because \iint_{D_1} x\sin y f(x^2+y^2)dxdy = 0$$

$$\iint_{D_2} x\sin y f(x^2+y^2)dxdy = 0$$

$$\iint_{D_1} xdxdy = 0$$



$$\therefore I = \iint_D x[1+\sin y f(x^2+y^2)]dxdy$$

$$= \iint_D xdxdy + \iint_D x\sin y f(x^2+y^2)]dxdy$$

$$= \iint_D xdxdy = \iint_{D_1 \cup D_2} xdxdy = \iint_{D_2} xdx$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{x^3}^{-x^3} xdy = -2\int_{-1}^{0} x^4 dx = -\frac{2}{5}。$$

五、有关二重积分的综合题。

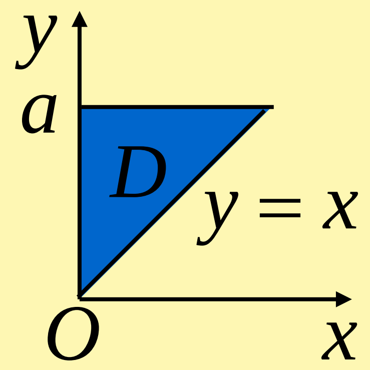
例6(1) 证明

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)dx = \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)dx$$

证明: 左端积分区域如图, 交换积分顺序

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)dx = \int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)} f(x)dy$$

$$= \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)dx$$



(2).设$f(u)$在$u=0$处可导，$f(0)=0$, 求

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy,\quad D: x^2+y^2\le t^2。$$

解：$$I=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(\rho)\rho d\rho=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi\int_0^t f(\rho)\rho d\rho}{t^3}$$

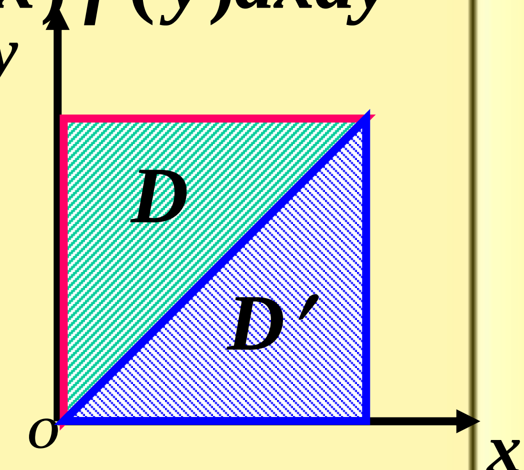
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi f(t)t}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi(f(t)-f(0))}{3t}=\frac{2\pi}{3}f'(0)$$

（3）已知$\int_0^1 f(x)dx = A$，f为连续函数求证：

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \frac{A^2}{2}$$

证明 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \iint_D f(x)f(y)dxdy$



$= \int_0^1 dy \int_y^1 f(y)f(x)dx$ x,y互换

$= \iint_{D'} f(x)f(y)dxdy$

$\therefore I = \frac{1}{2}[\iint_D f(x)f(y)d\sigma + \iint_{D'} f(x)f(y)d\sigma]$

$= \frac{1}{2}\iint_{D\cup D'} f(x)f(y)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f(y)dy = \frac{A^2}{2}$

或：利用原函数：令 $F(u)=\int_0^u f(x)dx$

$$dF(u)=f(u)du$$

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)dF(y)$$

$$=\int_0^1 f(x)[F(y)]\Big|_x^1 dx=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]dx$$

$$=\int_0^1 [F(1)-F(x)]dF(x)$$

$$=-\int_0^1 [F(1)-F(x)]d[F(1)-F(x)]$$

$$=-\frac{1}{2}[F(1)-F(x)]^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}[F(1)]^2=\frac{A^2}{2}$$

(4) 利用二重积分证明：$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geqslant (b-a)^2$

证明：左边 $= \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(y)}dy \quad D: a \le x \le b,\quad a \le y \le b.$

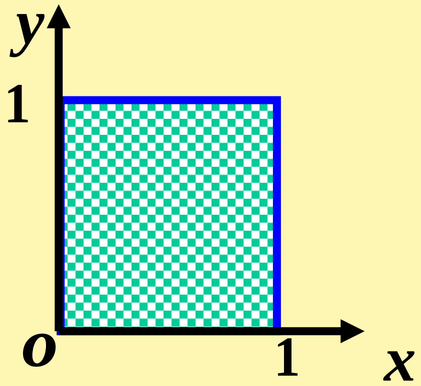
$$= \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right)dxdy$$

$$\ge \iint_D dxdy = (b-a)^2$$

（5） 设$f(x)$是[0，1]上的正值连续函数，且单调减少，求证

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} \qquad (1)$$



证明 在题设条件下，（1）式 $\Leftrightarrow$

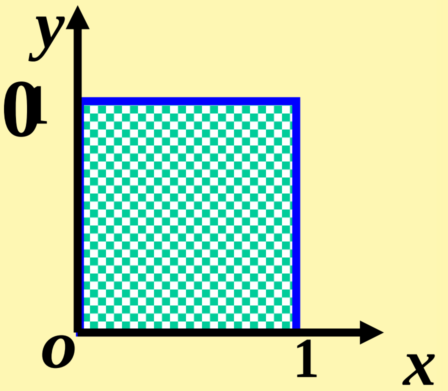
$$\int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 xf^2(x)dx \ge 0$$

$$\Leftrightarrow I = \iint_D [yf^2(x)f(y) - yf(x)f^2(y)]dxdy$$

$$= \iint_D yf(x)f(y)[f(x) - f(y)]dxdy \ge 0 \qquad (2)$$

其中$D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 。

$$I = \iint_D y f(x) f(y)[f(x) - f(y)]dxdy \ge 0$$



将上式中的x、y对换，有

$$I = \iint_D [xf^2(y) f(x) - xf(y) f^2(x)]dydx$$

$$= \iint_D xf(y) f(x)[f(y) - f(x)]dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D f(x) f(y)[f(x) - f(y)](y - x)dxdy$$

由于$f(x)$单调减且正值，知有

$$f(x) f(y)[f(x) - f(y)](y - x) \ge 0$$

所以$I \ge 0$，即(1)式成立。