8.3　三重积分

8.3.1、 三重积分的定义

定义1 设$f(x,y,z)$是空间有界闭区域 Ω上的有界函数。将 Ω任意分成n个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n,$$

其中Δv_i表示第i个小闭区域，也表示它的体积。

在每个Δv_i上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$，

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$。

如果当各小闭区域直径的最大值λ趋于零时这个和的极限总存在,则称此极限为函数 $f(x,y,z)$在闭区域Ω上的三重积分。

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i \quad (1)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i \quad (1)$$

其中dv叫做体积元素。

在直角坐标系中，如果用平行于坐标面的平面来划分Ω，

在直角坐标系下的体积元素：$dv=dxdydz$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

注：　1．可积性：　f 连续 $\Rightarrow$ 可积

2．物理意义

如果$f(x,y,z)$表示某物体在点(x,y,z)处的体密度，Ω是该物体所占的空间闭区域，$f(x,y,z)$在Ω上连续，则

物体的质量　$$M=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

3．几何意义

Ω的体积　$$V=\iiint_{\Omega} dxdydz$$

4．性质　同二重积分

8.3.2、直角坐标系下的三重积分的计算法

基本方法：化三重积分为三次单积分

第一种情况：投影法。

1．Ω为母线平行于z轴的曲顶，曲底柱体时

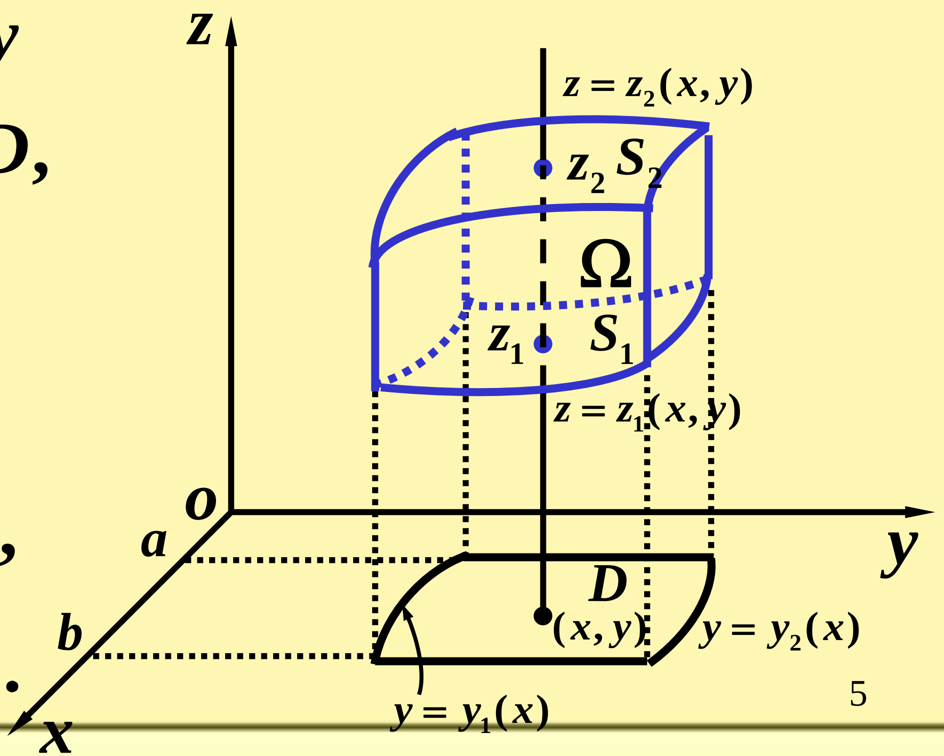
如图， 闭区域Ω在 xoy 面上的投影为闭区域D,

$S_1:\quad z = z_1(x, y),$

$S_2:\quad z = z_2(x, y),$

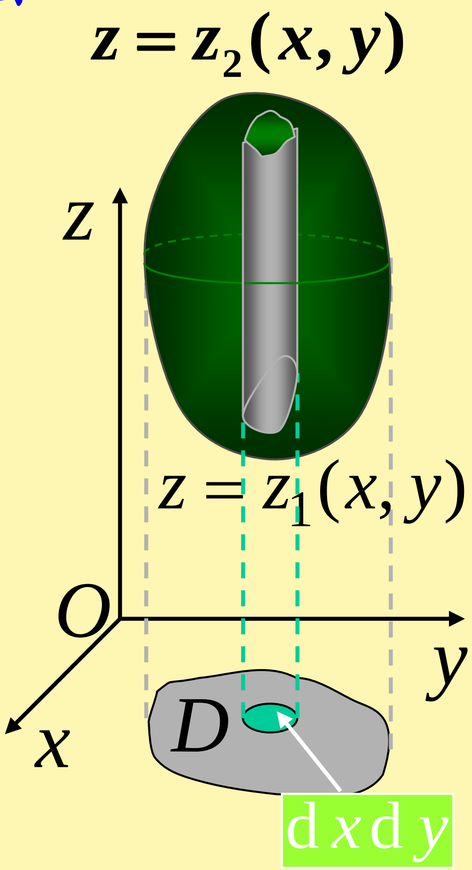
过点$(x, y) \in D$作直线,

从 z_1 穿入，从 z_2 穿出.



用物理意义讨论三重积分的计算方法

$$\Omega: \begin{cases} z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y) \\ (x,y) \in D \end{cases}$$



细长柱体微元的质量为

$$\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

该物体的质量为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$$

$$= \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{记作}} \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

先将 x,y 看作定值，将 $f(x,y,z)$只看作 z 的函数，则 $$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

计算 $F(x,y)$ 在闭区间 D 上的二重积分

$$\iint_D F(x,y)d\sigma=\iint_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]d\sigma.$$

若$D: y_1(x)\le y\le y_2(x),\quad a\le x\le b$, 得

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

上式的数学方法概括为：“先一后二法”，“投影法”

2. 母线平行y轴或x轴的柱体时

$$\Omega: y_1(z,x) \le y \le y_2(z,x), (z,x) \in D_{zx}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{D_{zx}} dzdx \int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)} f(x,y,z)dy$$

$$\Omega: x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z), (y,z) \in D_{yz}$$

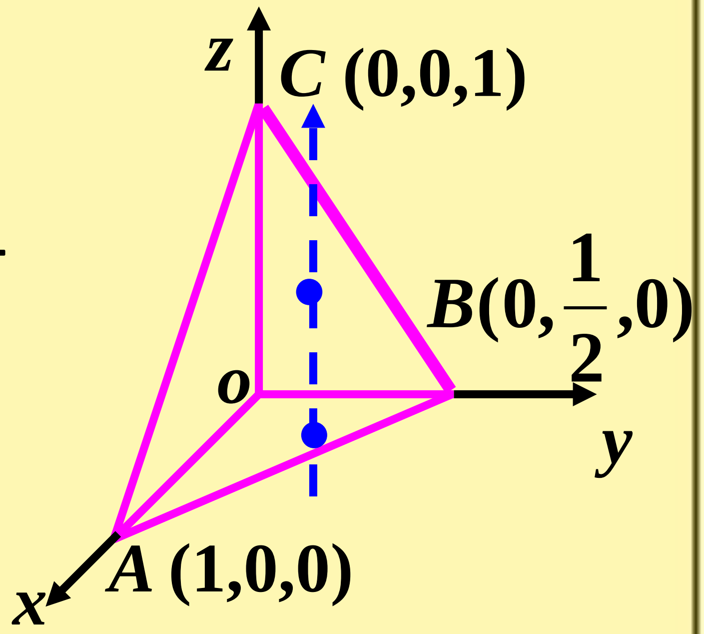
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{D_{yz}} dydz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

3. 区域的划分

(i) 当平行于母线（相应的坐标轴）而穿过Ω内部的直线与Ω的边界曲面的交点多于两个时

(ii) 曲顶（或曲底）的方程不能用统一的表达式给出时

例1 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$，其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域。



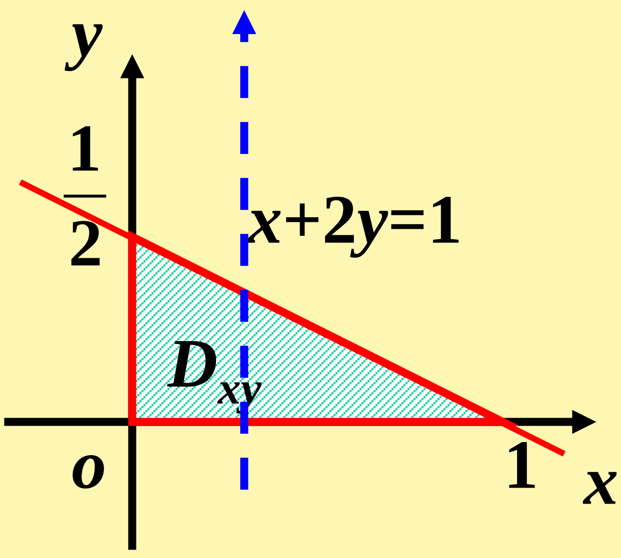
解 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right)d\sigma$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_0^{1-x-2y} x\,dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y)dy$$

$$=\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx=\frac{1}{48}。$$



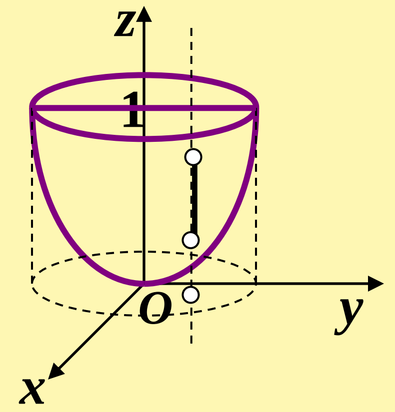
例2 化三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$为三次积分

(1) $\Omega: z = x^2 + y^2, z = 1$所围。

解：曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=1$的交线在xOy平面上的投影曲线为：$x^2+y^2=1$

Ω在xOy平面上的投影区域为D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant 1$

$$\Omega: x^2 + y^2 \le z \le 1, (x,y) \in D_{xy}$$



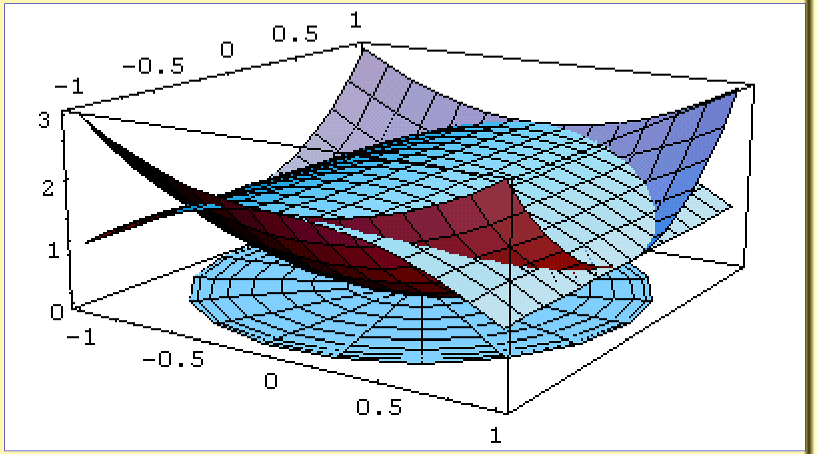
而D_{xy}可用不等式组

$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)dz$$

(2) $\Omega: z = x^2 + 2y^2, z = 2 - x^2$所围。

解 由$\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases}$,



得交线投影区域

$$x^2 + y^2 \le 1,$$

故 Ω: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \\ x^2 + 2y^2 \le z \le 2 - x^2 \end{cases}$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz.$$

4、三重积分的对称性质

(1) 若空间区域Ω关于xoy面对称，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv \quad \text{其中}\Omega_1\text{是}\Omega\text{的上半部分}$$

$$=\begin{cases} 0 & f\text{关于}z\text{是奇函数} \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv & f\text{关于}z\text{是偶函数} \end{cases}$$

空间区域Ω关于其它两个坐标平面对称由类似结论

(2) 若Ω关于变量x，y，z具有轮换对称性，则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(y,z,x)dv = \iiint_{\Omega} f(z,x,y)dv$$

$$= \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}[f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)]dV$$

若Ω为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所围，则

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV = \iiint_{\Omega} z^2 dV = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}[x^2+y^2+z^2]dV$$

例 3 利用对称性简化计算

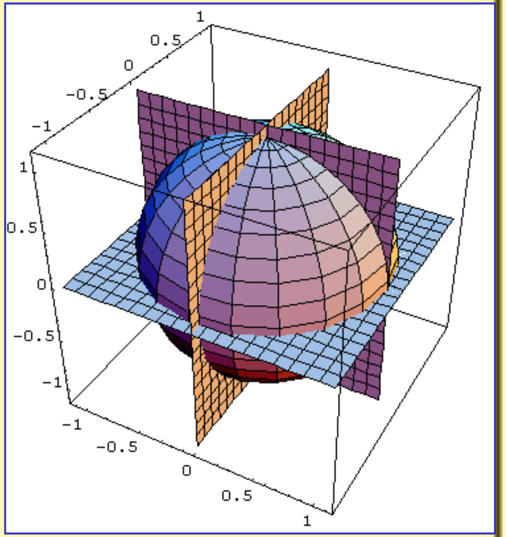
$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$$

其中积分区域$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

解 积分域关于三个坐标面都对称，

被积函数是 z 的奇函数,

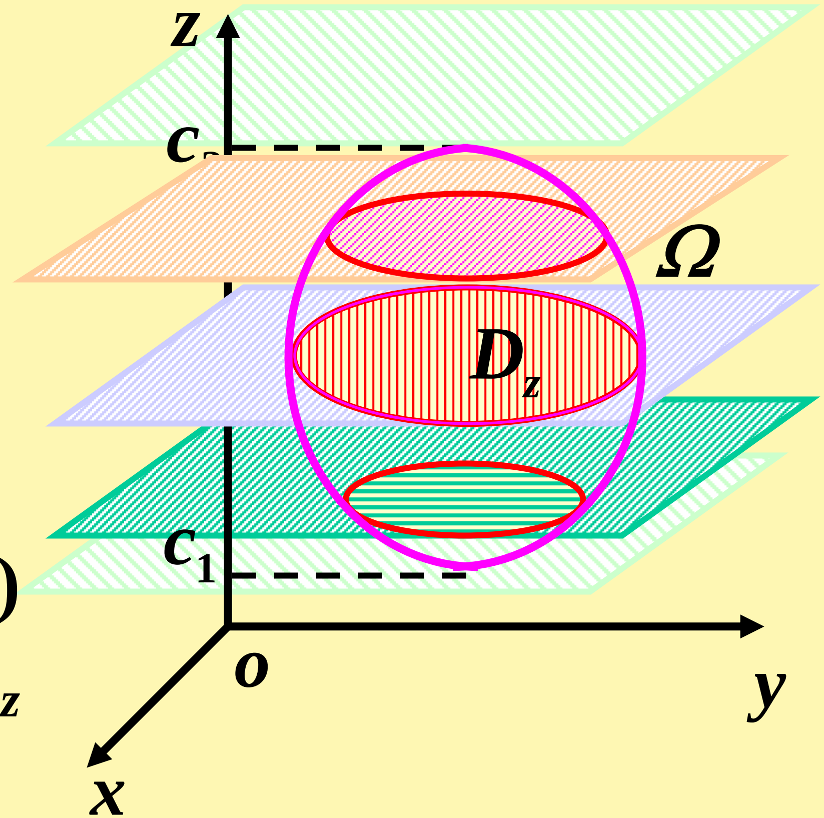
$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz=0.$$



第二种情况:截面法

又叫“先二后一法”

设区域Ω 夹在平面$z = c_1$，$z = c_2(c_1 < c_2)$之间

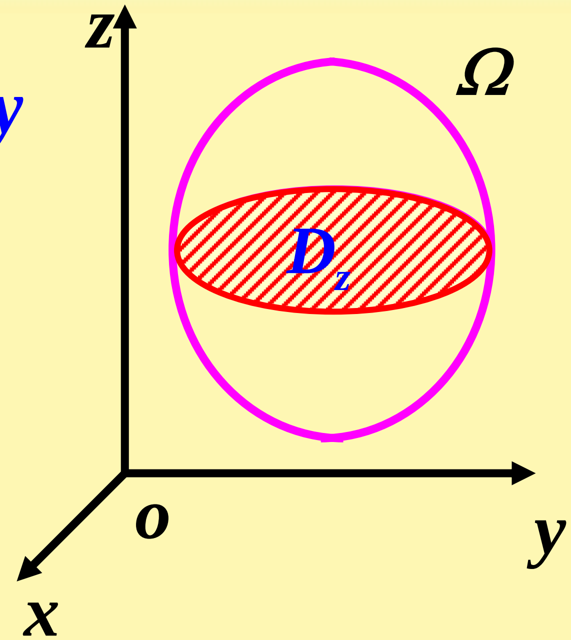


用竖坐标为$z\ (c_1 \le z \le c_2)$的平面截Ω所得截面为D_z或$D(z)$，即

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, c_1 \le z \le c_2\}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z)dxdy \qquad (3)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$



上式的适用范围：

①D_z简单（圆、椭圆、长方形等）

② $f(x,y,z)$在D_z上对x、y的二重积分简单，

特别当$f(x,y,z)$只是 z 的函数：$f(x,y,z)=\varphi(z)$，

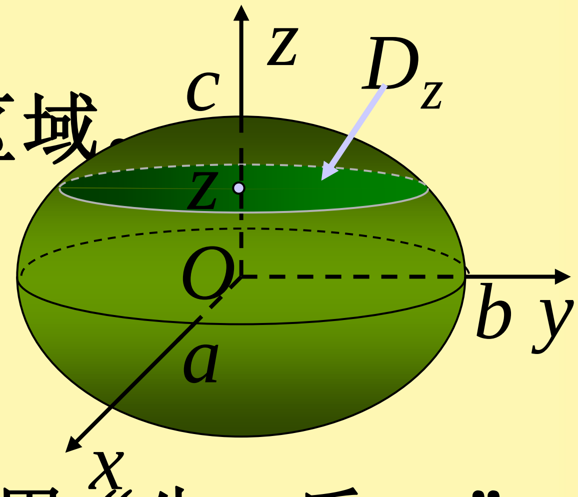
有 $$\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy = \iint_{D_z} \varphi(z)dxdy = \varphi(z)A(z)$$

其中$A(z)$是D_z的面积，于是

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{c}^{d} \varphi(z)A(z)dz$$

例4 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$，其中 Ω 是由椭球面

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域.



解

$$\Omega:\begin{cases} -c \leqslant z \leqslant c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$$

用“先二后一”

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz = \int_{-c}^{c} z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z^2 dz = \frac{4}{15}\pi abc^3。$$

类似地可得到

$$\iiint_{\Omega} y^2 dxdydz = \int_{-b}^{b} y^2 dy \iint_{D_y} dzdx$$

$$= \int_{-b}^{b} y^2 \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \frac{4}{15}\pi ab^3 c。$$

$$\iiint_{\Omega} x^2 dxdydz = \int_{-a}^{a} x^2 dx \iint_{D_x} dydz$$

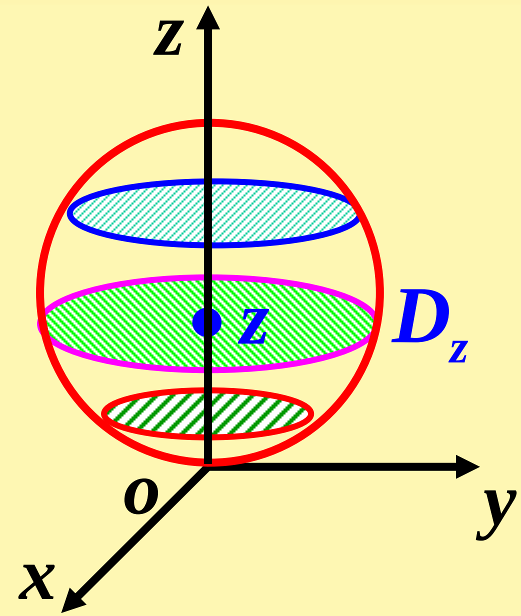
$$= \int_{-a}^{a} x^2 \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{15}\pi a^3 bc;$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

$$= \frac{4}{15}\pi abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

例5 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(y^4\sin x+z)dxdydz$,

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2Rz$



解 Ω关于yoz平面对称,

$y^4\sin x$关于x是奇函数

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega} y^4\sin x\,dv=0$$

$$D_z: x^2+y^2\le 2Rz-z^2$$

$$\because I=\iiint\limits_{\Omega}(y^4\sin x+z)dv=\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\int_0^{2R} z\,dz\iint\limits_{D_z}dxdy$$

$$=\int_0^{2R}\pi(2Rz^2-z^3)dz=\pi\left(\frac{2}{3}Rz^3-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^{2R}=\frac{4}{3}\pi R^4。$$

内容小结

1. 掌握直角坐标下的三重积分的计算方法

1、 投影法；先一后二

$$\Omega: z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

2、 平行截面法；先二后一

$$\Omega = \{(x,y,z) | (x,y) \in D_z, c \le z \le d\}$$

则有 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$

特别当$f(x,y,z)$只是 z 的函数：$f(x,y,z)=\varphi(z)$,

$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_c^d \varphi(z)A(z)dz$ 其中$A(z)$是D_z的面积

习题8. 3. 1