8.4 重积分的应用

8.4.1 微元法（元素法）

如果要求的量U：

（i）U对于有界闭区域$D(\Omega)$具有可加性；

（ii）在$D(\Omega)$内任取一直径很小的闭区域$d\sigma(dv)$，相应的部分量可近似地表示为

$$\Delta U \approx f(x,y)d\sigma = dU \quad \text{或} \Delta U \approx f(x,y,z)dv = dU$$

——量U的元素（微元）

$$U = \iint_D f(x,y)d\sigma \qquad \text{或} U = \iiint_D f(x,y,z)dv$$

例如,通过二重积分可求曲顶柱体的体积、平面薄片的质量、平面区域的面积

$$V=\iint_D f(x,y)d\sigma \quad m=\iint_D \rho(x,y)d\sigma \quad A=\iint_D d\sigma$$

通过三重积分可求空间区域Ω 的体积，物体的质量

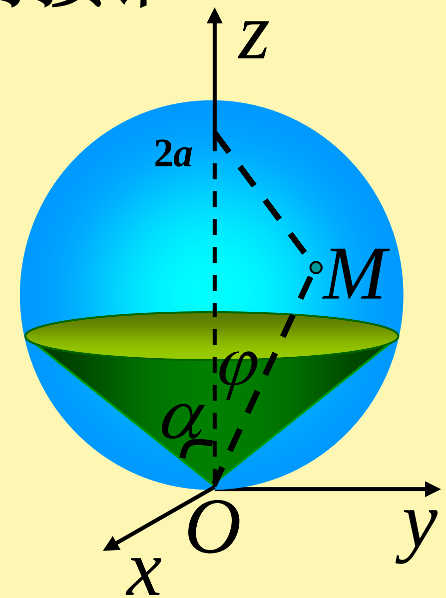
1. 空间区域Ω 的体积 $V=\iiint_\Omega dxdydz,$

2. 物体的质量

如果ρ (x，y，z)表示某物体在点(x，y，z)处的体密度，Ω是该物体所占的空间闭区域， ρ(x，y，z)在Ω上连续.

$$M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dv$$

例1 求半径为a的球面与半顶角为α的内接锥面所围成的立体（如图）的体积。



解: 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$0 \le r \le 2a\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \alpha, 0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi dr$$

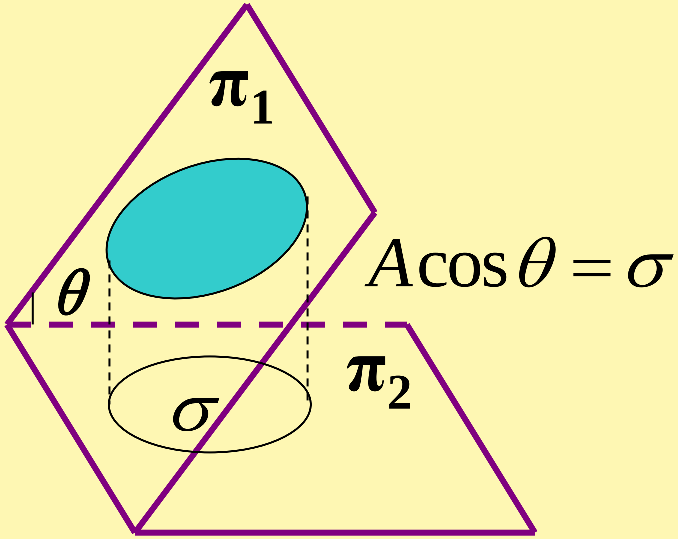
$$= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 dr$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}(1 - \cos^4\alpha)。$$

8.4.2 曲面的面积

1．平面有界闭区域在另一平面上投影的面积(如图)

$$A=\frac{\sigma}{\cos\theta}$$



θ 为两平面的夹角。

即 $A\cos\theta=\sigma$

2．曲面面积的计算方法

(1). 设曲面的方程为: $z = f(x, y)$

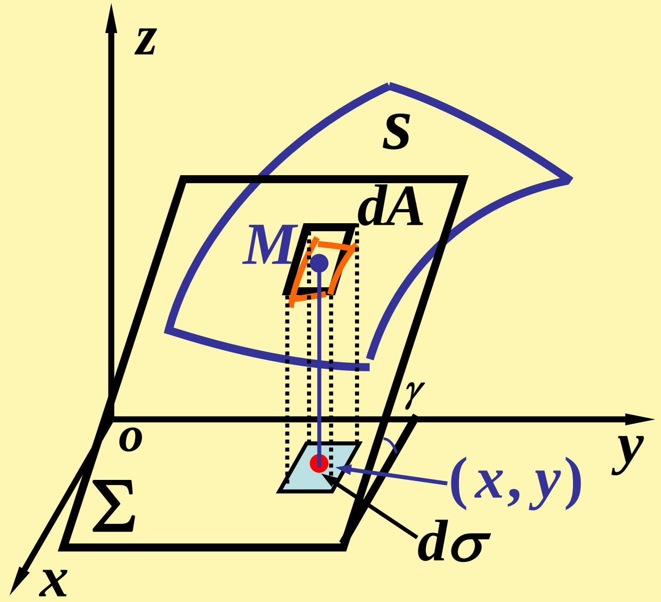
在 xoy 面上的投影区域为 D,

如图, 设小区域 $d\sigma \in D$,

点 $(x, y) \in d\sigma$,

Σ 为 S 上过 $M(x, y, f(x, y))$

的切平面.

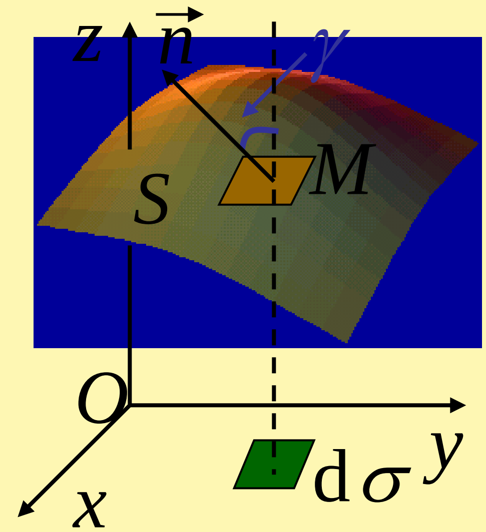


以 $d\sigma$ 边界为准线, 母线平行于 z 轴的小柱面, 截曲面 s 为 ΔA; 截切平面 Σ 为 dA,

则有 $\Delta A \approx dA$.

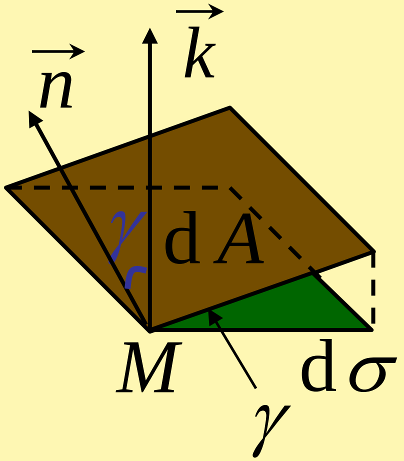
设它在 D 上的投影为 $d\sigma$,

则 $d\sigma = \cos\gamma \, dA$



$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}}$$

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, d\sigma$$



(称为面积元素)

$$\therefore A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, d\sigma,$$

曲面面积公式为：$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

同理可得

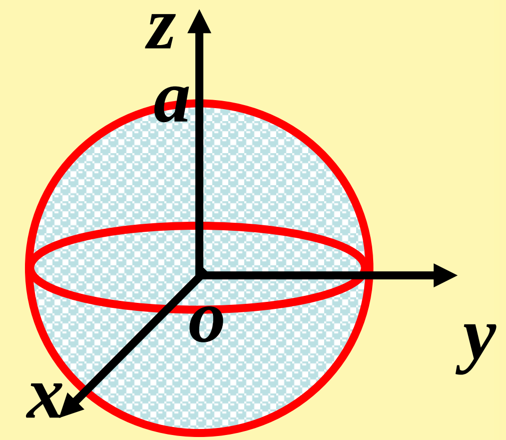
(2). 设曲面的方程为：$x=g(y,z)$

曲面面积公式为：$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

(3). 设曲面的方程为：$y=h(z,x)$

曲面面积公式为：$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dzdx$$

例2 求半径为a的球的表面积。

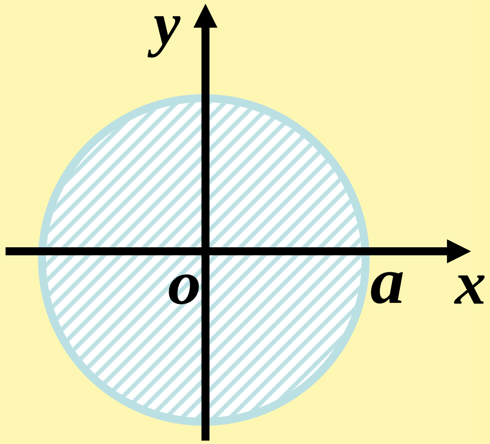


解 取$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, z\geq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

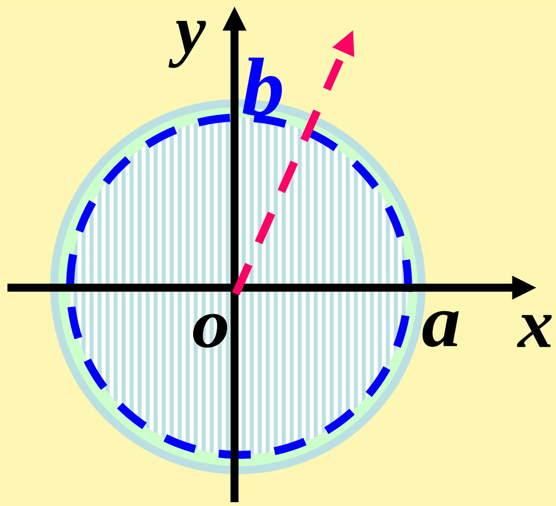
$$\therefore dA=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$



因为这函数在闭区域D上无界，

我们不能直接应用曲面面积公式。$D_{xy}: x^2+y^2\leq a^2$

取区域D_1：$x^2+y^2\le b^2(0<b<a)$为积分区域，求出相应于D_1上的球面面积A_1后，再令$b\to a$取A_1的极限即可得到半球的面积。



$$\because A_1=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

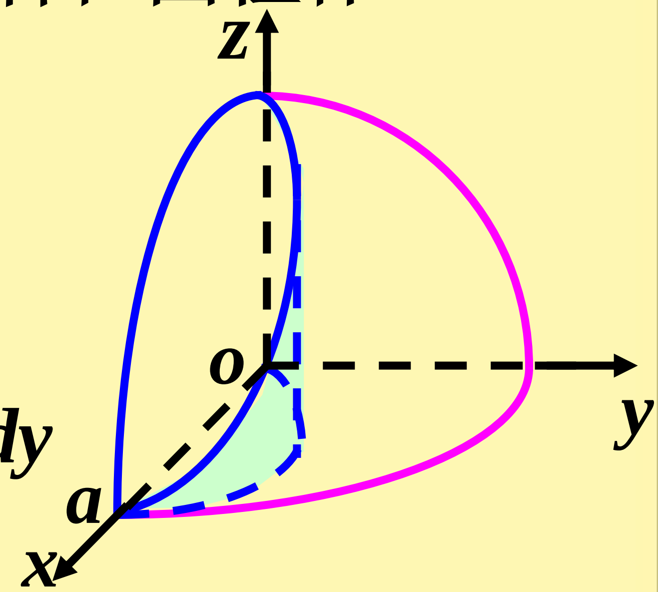
$$=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho d\theta=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^b\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$=2\pi a\int_0^b\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\qquad=2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})$$

$$\therefore\lim_{b\to a}A_1=\lim_{b\to a}2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})=2\pi a^2。$$

所以整个球面的面积为$A=4\pi a^2$。

例 3 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，含在圆柱体 $x^2+y^2\le ax$ 内部的那部分面积.



解

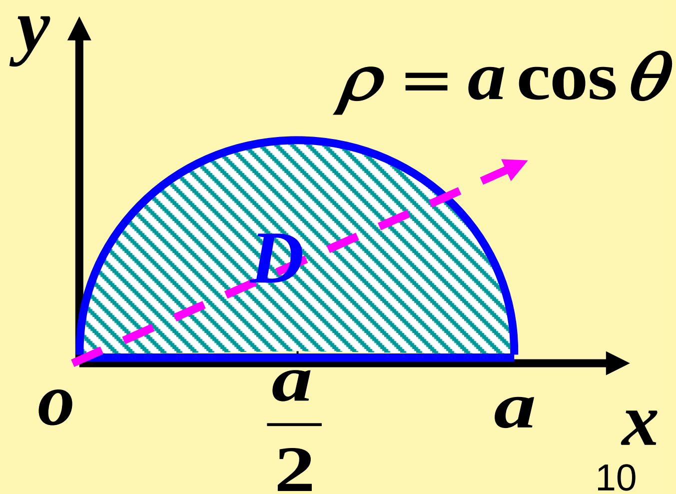
$$dA=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$A=4\iint_D dA=4\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

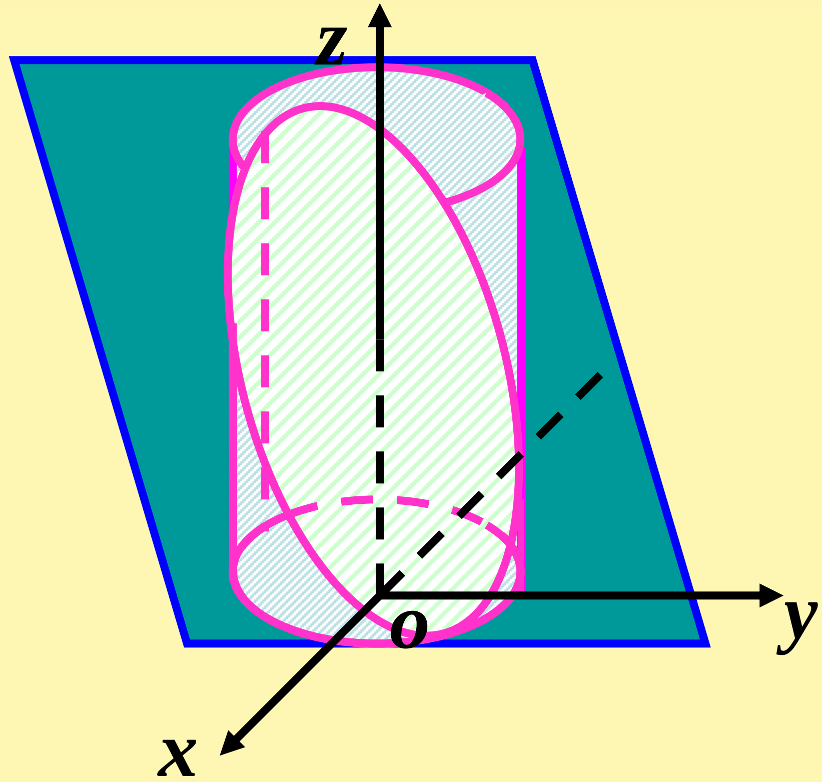
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho$$

$$=-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{a^2-\rho^2})\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta$$

$$=4a^2(\frac{\pi}{2}-1)。$$



例4 平面$x+2y+3z-8=0$被柱面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$割下部分的面积。

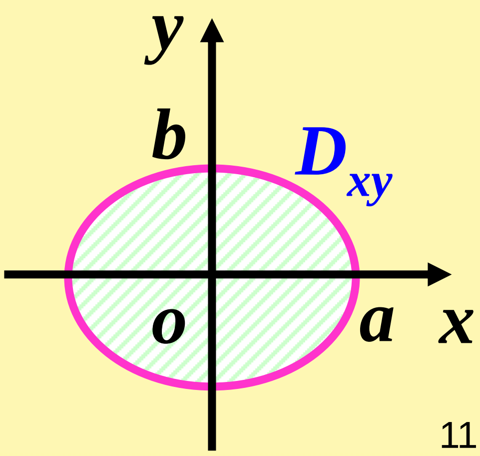


解 $\because z=\dfrac{1}{3}(8-x-2y)$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{3},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{3}$$

$$dA=\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}\,d\sigma=\frac{\sqrt{14}}{3}\,d\sigma$$

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{14}}{3}\,d\sigma=\frac{\sqrt{14}}{3}\sigma=\frac{\sqrt{14}}{3}\cdot\pi ab。$$



8.4.3 质心

先讨论平面薄片的质心。

设在xoy平面有n个质点分别位于(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)处，质量分别为m_1、m_2、…、m_n,由力学知道:

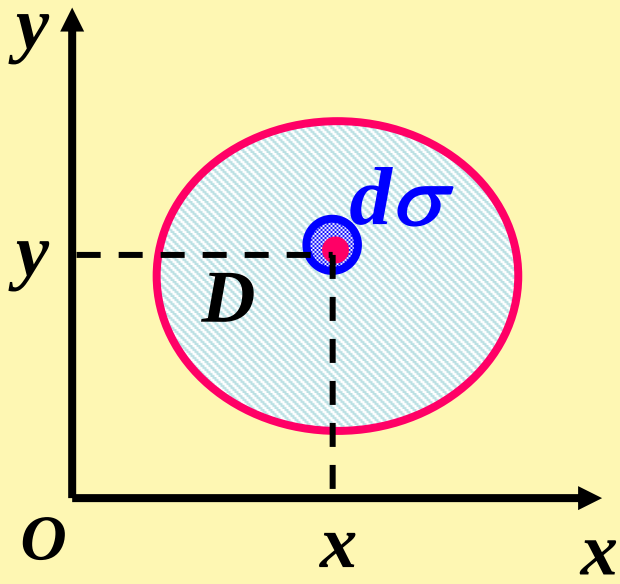
$$M_y=\sum_{i=1}^{n}x_i m_i, \quad M_x=\sum_{i=1}^{n}y_i m_i$$

M_y、M_x叫质点系对于坐标轴的静力距。

该质点系的质心坐标 $G(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

设有平面薄片,占有xoy平面上的闭区域D,点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$在D上连续,求$G(\bar{x},\bar{y})$。



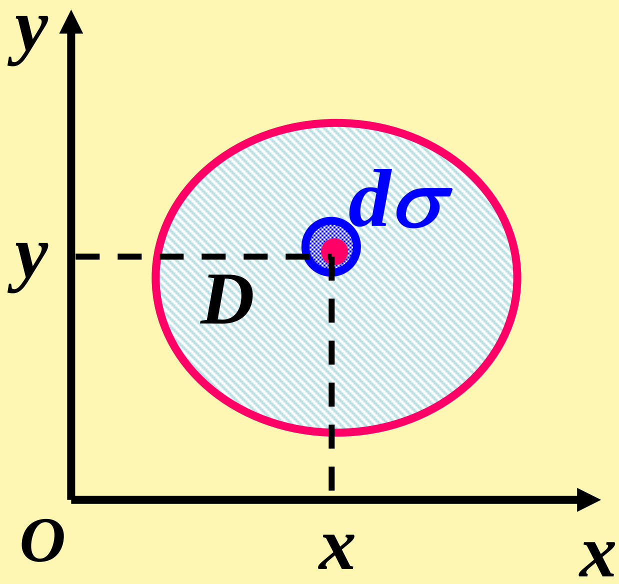
先将物体分割为许多小部分，考虑其中的一个部分$d\sigma$，它的质量元素为

$$dm=\rho(x,y)d\sigma$$

这个部分$d\sigma$对于x轴以及对于y轴的静力距元素为

$$\therefore dM_x=ydm=y\rho(x,y)d\sigma \quad dM_y=xdm=x\rho(x,y)d\sigma$$

以这些元素为被积表达式，在闭区域D上积分，可得



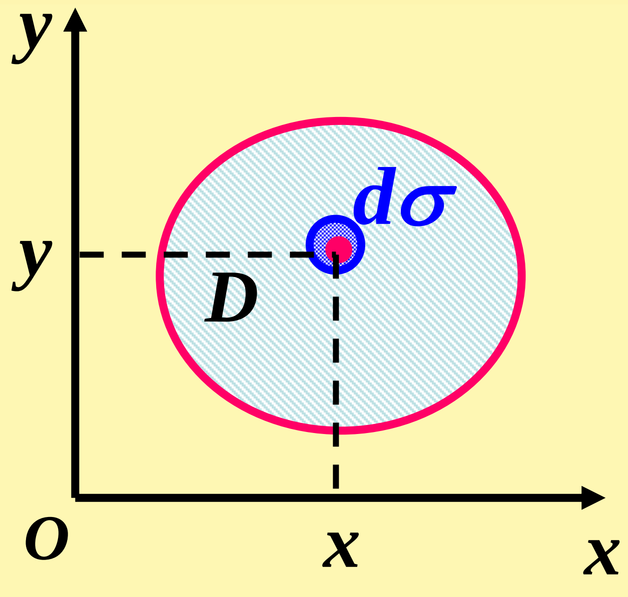
$$\therefore M_y = \iint_D x\rho(x,y)d\sigma,$$

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)d\sigma$$

所以平面薄片的质心坐标$G(\bar{x},\bar{y})$为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$$

如果薄片是均匀的，
即当$\rho(x,y)$为常量时，可
得到如下的质心坐标：



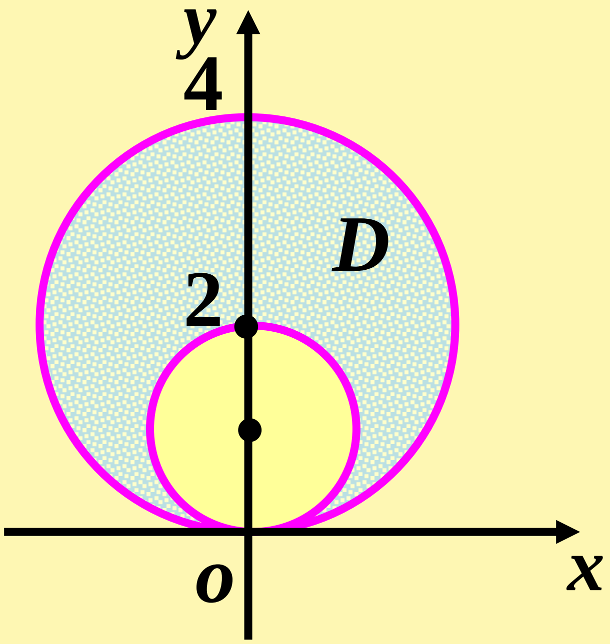
$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho_0 d\sigma}{\iint\limits_D \rho_0 d\sigma}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x d\sigma,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D y d\sigma。$$

$(\bar{x},\bar{y})$－－－－形心。

这时薄片的质心完全由闭区域D的形状决定，
这样求得的质心又称为平面薄片的形心。

例5　求位于两圆$\rho=2\sin\theta$和$\rho=4\sin\theta$之间的均匀薄片的质心(如图)。

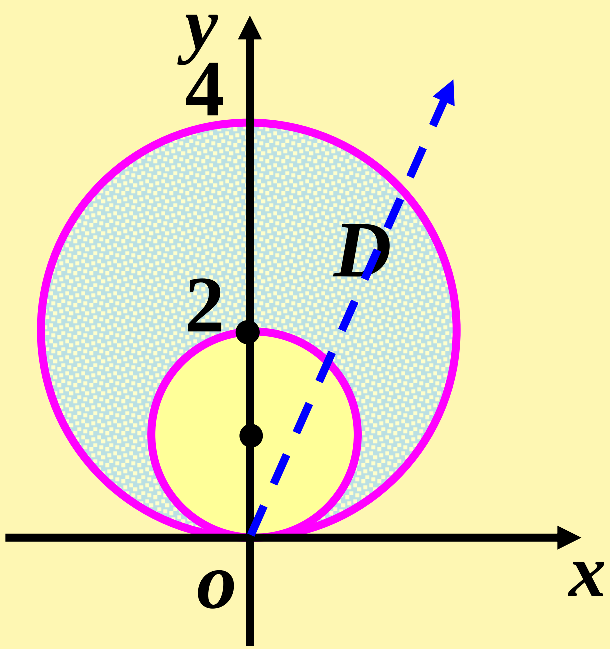


解　因为闭区域D对称于y轴,所以质心$G(\bar{x},\bar{y})$必位于y轴上,于是

$$\bar{x}=0,\ \bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,d\sigma。$$

由于闭区域D位于半径为1与半径为2的两圆之间，所以它的面积等于这两个圆的面积之差，即$A=3\pi$。

再利用极坐标计算积分



$$\iint\limits_D y d\sigma = \iint\limits_D \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^2 d\rho$$

$$= \frac{56}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = 7\pi。$$

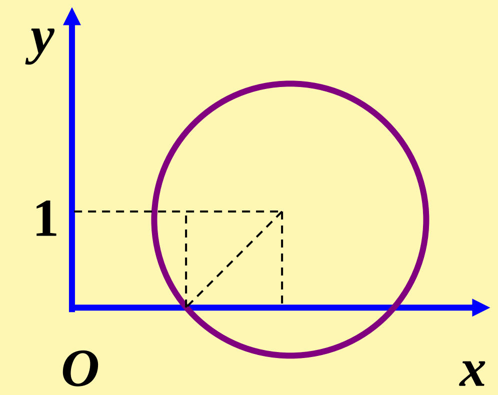
因为$\bar{y} = \dfrac{7\pi}{3\pi} = \dfrac{7}{3}$,所求质心坐标是$G(0, \dfrac{7}{3})$。

反过来，也可利用静力矩、形心概念求形如

$$\iint\limits_D (ax+by+c)d\sigma$$ 类的积分。

当然，这需要心、面积易知。

例 计算 $\iint\limits_D (3x-2y)d\sigma, D:(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$



解：

$$\iint\limits_D x d\sigma = \bar{x}\cdot\sigma = 2\cdot 2\pi = 4\pi$$

$$\iint\limits_D y d\sigma = \bar{y}\cdot\sigma = 1\cdot 2\pi = 2\pi,$$

所以

$$I = 3\iint\limits_D x d\sigma - 2\iint\limits_D y d\sigma = 12\pi - 4\pi = 8\pi.$$

类似地,设有物体占有空间有界闭区域Ω,在点(x,y,z)处的体密度为$\rho(x,y,z)$是Ω上的连续函数,则该物体的质心坐标$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$是

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)x\,dv}{M},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)y\,dv}{M},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)z\,dv}{M}$$

其中 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv$。

8.4.4 转动惯量

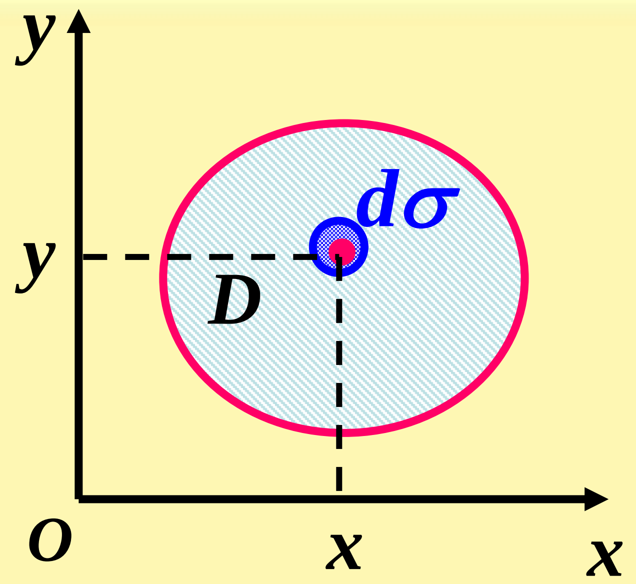
先讨论平面薄片的转动惯量。

设在xoy平面有n个质点分别位于(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)处，质量分别为m_1、m_2、…、m_n,由力学知道:

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}y_i^2 m_i,\qquad I_y=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 m_i$$

I_x、I_y是该质点系对于坐标轴x轴以及y轴的转动惯量。

设有一平面薄片占有平面闭区域D，在点(x,y)处具有连续面密度$\rho=\rho(x,y)$，下面利用元素法求该平面薄片对两坐标轴的转动惯量。



先将物体分割为许多小部分，考虑其中的一个部分$d\sigma$，它的质量元素为 $dm=\rho(x,y)d\sigma$

这个部分$d\sigma$对于x轴以及对于y轴的转动惯量元素为 $dI_x=y^2\rho(x,y)d\sigma$ $dI_y=x^2\rho(x,y)d\sigma$

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,\quad I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$$

类似地，若$\rho(x,y,z)$表示某物体在点(x,y,z)处的体密度，Ω是该物体所占的空间闭区域，$\rho(x,y,z)$在Ω上连续，则该物体关于坐标轴的转动惯量分别为：

$$I_z = \iiint_{\Omega} (y^2 + x^2)\rho(x,y,z)dv$$

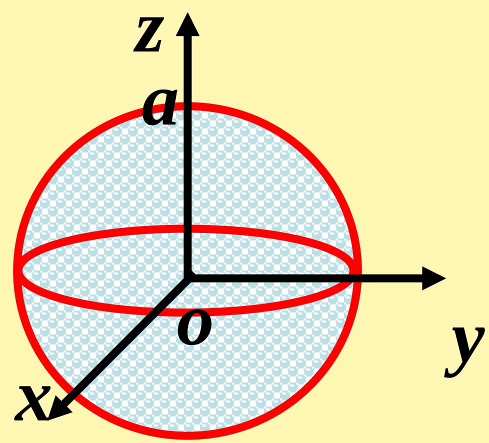
$$I_x = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)(y^2 + z^2)dv \quad 等;$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)(x^2 + z^2)dv$$

例6 求均匀球体(密度为ρ)对其直径的转动惯量.

解 设球心在原点, 半径为a,

则球体对直径z轴的转动惯量为



$$I_z = \iiint_{\Omega} \rho(x^2 + y^2)dv$$

$$= \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{a} d(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi dr$$

$$= \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi\int_0^{a} r^4 dr = \frac{2}{5}\pi a^5\rho\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{5}a^2 M$$

其中$M = \dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$ 为半圆薄片的质量。

内容小结

1、会求空间曲面的面积，空间立体的体积。

2、会求物体的质量，质心，转动惯量。

作业

同步练习册　　习题 8.4